Grafisches Darstellen zu Textaufgaben fördern – eine Interventions- und Evaluationsstudie in der 3. Jahrgangsstufe

Promoting Children's Drawings for Word Problems—an Intervention and Evaluation Study in Grade 3

Barbara Ott

Institut Lehr- & Lernforschung, Pädagogische Hochschule St. Gallen, Notkerstraße 27, 9000 St. Gallen, Schweiz

E-Mail: barbara.ott@phsg.ch

Eingegangen: 1. November 2016 / Angenommen: 21. Dezember 2017 / Online publiziert: 19. Januar 2018

Ott, B. (2018). Grafisches Darstellen zu Textaufgaben fördern: Eine Interventions- und Evaluationsstudie in der 3. Jahrgangsstufe. Journal für Mathematik-Didaktik, 39(2), 285-318. https://doi.org/10.1007/s13138-017-0125-9

Zusammenfassung

Darstellungen sind für Erkenntnis- und Kommunikationsprozesse in der Mathematik und im Mathematikunterricht wesentlich. Im Sachrechnen werden grafische Darstellungen hauptsächlich als Bearbeitungshilfen verwendet und erforscht. Studien zur Förderung der Nutzung grafischer Bearbeitungshilfen zeigen kein einheitliches Bild. Forschungsergebnisse zu einem Unterricht, der von Kindern selbstgenerierte grafische Darstellungen im Sachrechnen als Erkenntnis-, Kommunikations- und Reflexionsmittel verwendet, mit dem Ziel, die Entwicklung der grafischen Darstellungsfähigkeiten der Kinder zu fördern, gibt es bisher nicht. Hierauf fokussiert die vorliegende Studie. Dabei wird untersucht, inwieweit sich eine dementsprechende Intervention auf die Darstellungsfähigkeiten der Kinder und die Lösungsraten zu Textaufgaben auswirkt. Die Ergebnisse zeigen, dass die Schülerinnen und Schüler der Interventionsgruppe bei relativ gleichbleibendem Abstraktionsgrad signifikant häufiger als Kinder aus Kontrollgruppen mathematisch passende grafische Darstellungen der mathematischen Struktur anfertigen. Die Lösungsraten verbessern sich kontinuierlich, der Unterschied ist jedoch nicht signifikant. Das Beachten der korrekten mathematischen Struktur einer Textaufgabe in der grafischen Darstellung kann jedoch als Voraussetzung für eine mögliche Nutzung als Bearbeitungshilfe betrachtet werden.

Schlüsselwörter

Grafische Darstellungen; Textaufgaben; Reflexion; Primarstufe; Intervention; Evaluation

MESC-Codes C 72 · D 42 · F 92

Abstract

External representations are essential for mathematical understanding and for mathematical communication processes. In particular, graphic representations are taught and researched as tools for solving word problems. Studies concerning the use of these tools do not produce consistent results. Furthermore, there is a lack of research into the development of children's graphic competences, when the chil- dren's self-generated graphic representations for word problems are used in lessons as a means of knowledge, communication and reflection. This project, therefore, focuses on this gap by researching the effect of such an intervention on the ability of children to create graphic representations and on the solution rates of word prob- lems. The results show that the children in the intervention group, with a relatively constant degree of abstraction, produce mathematically appropriate graphic repre- sentations of the mathematical structure significantly more frequently than children from control groups. Solution rates improve, but the difference is not significant. However, when using drawings as tools for solving word problems, observing the correct mathematical structure of a word problem in a graphic representation can be regarded as an essential prerequisite.

Keywords

Graphic representation; Word problem; Reflection; Primary school; Intervention; Evaluation

1 Einleitung

Darstellungen sind für Erkenntnisprozesse in der Mathematik und im Mathematikunterricht wesentlich. Mathematische Beziehungen werden in Darstellungen sichtbar und können untersucht werden. Dies macht Darstellungen auch für mathematische Lernprozesse bedeutsam. Dabei repräsentieren Darstellungen nicht einfach mathematische Objekte, sondern die Darstellung kann selbst als die mathematische Idee gesehen werden und bestimmt diese mit (vgl. Dörfler 2015; Pimm 1987)[1]. Die Entwicklung und Diskussion mathematischer Sachverhalte erscheint somit ohne das Nutzen von Darstellungen vielfach unmöglich. Sie sind sowohl Mittel zum Er- kenntnisgewinn als auch Grundlage für Verständigung und Kommunikation über mathematische Sachverhalte (vgl. Dörfler 2015). Zudem ermöglichen sie Reflexionen und metakognitive Überlegungen (Bruner 1966, S. 24). Es können verschiedene mathematische Darstellungssysteme unterschieden werden. In jedem System sind Verknüpfungen und mathematische Relationen definiert. Bezüglich eines mathematischen Sachverhalts sind die Systeme paarweise isomorph aufeinander bezogen (vgl. Dörfler 2015). Ein flexibler Umgang mit verschiedenen Darstellungen wird als wesentlich für den Erwerb eines mathematischen Verständnisses und als Ausdruck mathematischer Kompetenz angesehen (vgl. Laakmann 2013; Goldin und Shteingold 2001; Lesh et al. 1987). Gleichzeitig besteht darin eine große Herausforderung für die Lernenden (vgl. Duval 2006). Auch das erfolgreiche mathematische Problemlösen hängt mit dem Nutzen passender Vor- und Darstellungen zusammen (vgl. Fagnant und Vlassis 2013).

Spätestens seit der Veröffentlichung der Bildungsstandards im Fach Mathematik (KMK 2005) wird dem Darstellen entsprechend seiner Bedeutung für die Mathematik auch im Mathematikunterricht ein hoher Stellenwert eingeräumt. Das Darstellen ist hier als ein „Ziel“ schulischer Lehr-Lern-Prozesse im Sinne der Ausbildung und Förderung allgemeiner Kompetenzen normativ gesetzt. Die Kompetenz „Darstellen“ beinhaltet in den Standards das Entwickeln und Nutzen geeigneter Darstellungen für das Bearbeiten mathematischer Probleme sowie das Übersetzen, Vergleichen und Bewerten von Darstellungen (KMK 2005, S. 8). Kommunikative Funktionen des Darstellens sind der Kompetenz „Kommunizieren“ (ebd.) zugeordnet.

Im Kontext des Sachrechnens werden grafische Darstellungen in ihrer Funktion als Hilfsmittel für die Aufgabenlösung thematisiert (Franke und Ruwisch 2010, S. 103 ff). Grafische Bearbeitungshilfen sollen die Kinder beim Verständnis der Sachsituation und beim Finden einer passenden Lösung unterstützen. Studien zeigen jedoch, dass Kinder oft Schwierigkeiten haben, grafische Bearbeitungshilfen zu verwenden. Vor allem bereite es ihnen Probleme, die mathematischen Beziehungen der Aufgaben grafisch abzubilden (vgl. Hasemann 2006).

Fasst man diese Befunde zusammen, so zeichnet sich zum einen ein Dissens zwischen den fachdidaktisch motivierten Ideen und der realen Umsetzung und Nutzung durch die Lernenden in der Primarstufe ab. Zum anderen werden grafische Darstellungen im Sachrechnen als Hilfsmittel zur Aufgabenlösung eingesetzt und haben damit lediglich eine „Stützfunktion“ (Krauthausen und Scherer 2007, S. 259). Als Darstellungsform mit eigenen Regeln für die Erstellung und die Darstellung mathematischer Strukturen werden sie kaum thematisiert.

Wie sich ein Unterricht, der grafische Darstellungen als eigene Darstellungsform ins Zentrum stellt, auf die Darstellungsfähigkeiten der Lernenden und die Lösungsrichtigkeit von Sachaufgaben auswirkt,

[1] Die Beziehung zwischen Darstellungen und mathematischen Objekten wird in der Literatur unterschied-ich betrachtet. So sieht beispielsweise Duval (2006) Darstellungen als Repräsentationen abstrakter mathematischer Objekte an.

ist unklar. Die hier beschriebene Studie leistet einen Beitrag in diese Richtung, indem eine auf die Entwicklung von Bewusstheit (vgl. Mason 1987) für das Erstellen von Darstellungen ausgerichtete Intervention evaluiert wird[2]. Ähnlich wie im Arithmetikunterricht bezüglich Rechenstrategien bereits verschiedentlich erprobt (z. B. Steinweg 2002), bilden selbstgenerierte grafische Darstellungen der Kinder die Grundlage für Reflexionsgespräche, mit dem Ziel, die Darstellungsfähigkeiten der Kinder zu fördern.

2 Theoretische Rahmung

Darstellungen werden in verschiedenen Forschungsdisziplinen erforscht. Dabei werden jeweils besondere Charakteristika und Funktionen von Darstellungen herausgearbeitet, die auch für das grafische Darstellen im Sachrechnen bedeutsam sind. Im Folgenden werden die, für diese Arbeit, wesentlichen Begriffe geklärt sowie Forschungsbefunde und Forschungsdesiderate im Bereich des grafischen Darstellens zu Textaufgaben herausgearbeitet. Da in der Studie eine auf die Entwicklung von Bewusstheit (vgl. Mason 1987) für das Erstellen von grafischen Darstellungen ausgerichtete Intervention evaluiert wird, erfolgt ebenso eine kurze Auseinandersetzung mit Forschungsergebnissen zur Entwicklung von Bewusstheit durch Reflexionen.

2.1 Begriffsklärung

Für die Mathematik ist die Darstellung mathematischer Beziehungen in Diagrammen wesentlich. Grafische Darstellungen können den Charakter von Diagrammen haben. Im Folgenden werden zunächst die grundlegenden Begriffe „Darstellung“, „grafische Darstellung“ und „Diagramm“ geklärt.

2.1.1 Darstellung

Der Begriff Darstellung wird im Allgemeinen oft mit dem der Repräsentation gleichgesetzt. Es wird darunter etwas verstanden, das für etwas Anderes steht (vgl. Duval 2006). Die Repräsentation ist eine Funktion, die Darstellungen erfüllen können. Insgesamt ist diese Definition jedoch zu kurz gegriffen.

Darstellungen können als Inskriptionen (vgl. Latour 1990; Latour und Woolgar 1986) verstanden werden. Inskriptionen sind jegliche Formen von Materialisierungen in einem Medium, z. B. auf dem Papier (Gravemeijer 2010, S. 18 f). Dadurch sind Inskriptionen im Gegensatz zu Vorstellungen direkt für andere zugänglich und können Teil einer sozialen Praxis werden, in der die Bedeutung der Inskription ausgehandelt und dadurch Erkenntnis gewonnen wird (vgl. Roth und McGinn 1998). Inskriptionen können auch als die wahrnehmbare Basis von Zeichen aufgefasst werden. Als solche vermitteln sie zwischen einem Objekt, das durch sie dargestellt wird, und einem interpretierenden

[2] Die Studie ist der zweite Teil meines Dissertationsprojekts zum grafischen Darstellen zu Textaufgaben. Das gesamte Projekt ist in Ott (2016) publiziert.

Subjekt und dienen damit einem individuellen Erkenntnisgewinn (vgl. Peirce 1965; CP 2228[3]; Hoffmann 2005). Peirce (ebd.) arbeitet heraus, dass ein Zeichen nicht per se für etwas steht, sondern vielmehr nur für jemanden etwas vor einem gewissen Hintergrund repräsentiert. Zum Verstehen eines Zeichens sind somit stets Lese- und Interpretationsprozesse nötig. Zeichen erfüllen damit eine Funktion als Erkenntnis- und Repräsentationsmittel (Hoffmann 2005, S. 34 ff). Um die Repräsentationsfunktion genauer zu untersuchen, können Darstellungen auch als Repräsentationen innerhalb eines strukturierten Repräsentationssystems betrachtet werden (vgl. Goldin und Kaput 1996; Palmer 1978). Innerhalb eines Repräsentationssystems werden Informationen über den repräsentierten Sachverhalt abgebildet, indem die wesentlichen Informationen durch die innere Struktur der Repräsentation wiedergegeben werden (vgl. Palmer 1978, S. 264). Die Betrachtung der inneren Strukturen ermöglicht es, Beziehungen zwischen verschiedenen Repräsentationen genauer zu untersuchen.

2.1.2 Grafische Darstellung

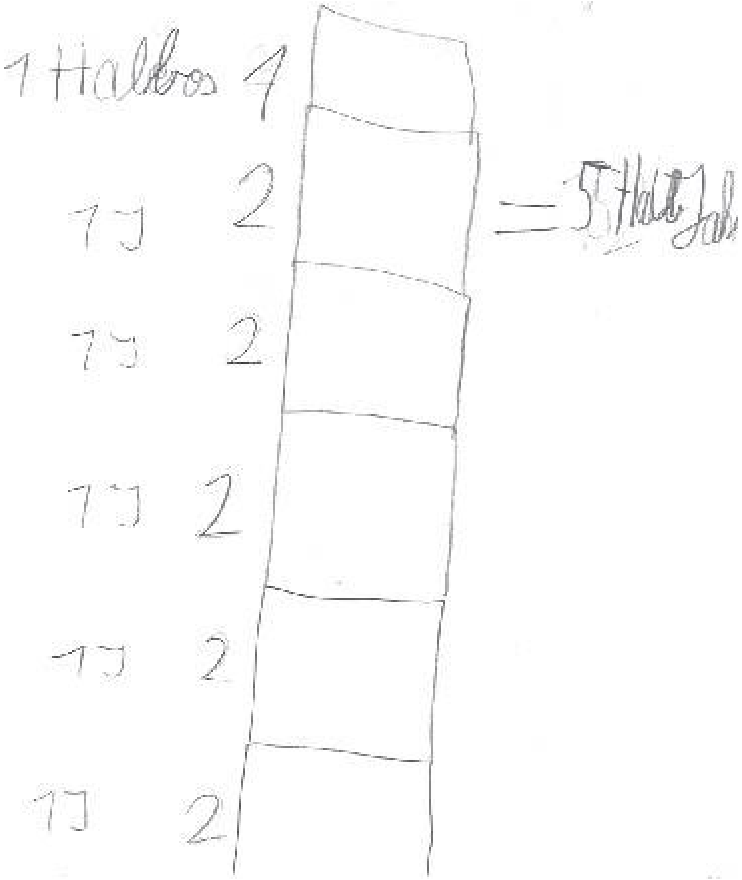
In der mathematikdidaktischen Literatur werden verschiedene Darstellungsformen unterschieden (vgl. z. B. Goldin und Shteingold 2001; Lesh et al. 1987; Bruner 1964). Alle Klassifizierungen führen im weitesten Sinn bildliche Darstellungen als eine Kategorie oder Unterkategorie von Darstellungen an. Eine in Bezug auf das grafische Darstellen zu Textaufgaben hilfreiche Klassifizierung ist die Unterscheidung zwischen depiktionalen und deskriptionalen Darstellungen (Schnotz 2014, S. 47 f). Deskriptionale Darstellungen beschreiben einen Sachverhalt durch Symbole. Beispiele hierfür sind Terme oder Sätze, und damit auch Textaufgaben. Zur Beschreibung von Beziehungen zwischen einzelnen Elementen sind in deskriptionalen Darstellungen „Relationszeichen" (Schnotz 2001, S. 297) notwendig, durch die Strukturinformationen in die Darstellung eingebaut werden. In Texten benennen beispielsweise Substantive den Sachverhalt und werden durch Verben und Präpositionen miteinander in Beziehung gesetzt. Depiktionale Darstellungen hingegen sind „räumliche Konfigurationen, die aufgrund struktureller Gemeinsamkeiten für den repräsentierten Sachverhalt stehen" (Schnotz 2014, S. 48). Sie besitzen Struktureigenschaften, die mit Eigenschaften des darzustellenden Sachverhaltes übereinstimmen und weisen somit eine Ähnlichkeit zum Sachverhalt auf (Schnotz 2001, S. 297). Die Ähnlichkeit kann darin bestehen, dass repräsentierte und repräsentierende Merkmale übereinstimmen, wie z. B. in einer Fotografie, oder voneinander verschieden sind, wie z. B. in einem Streifendiagramm, in dem Längenverhältnisse verwendet werden, um die Addition von Zahlen darzustellen. Depiktionale Darstellungen beinhalten keine Relationszeichen zur Strukturabbildung (Schnotz 2014, S. 47). Auch Tabellen können aufgrund ihrer Beschaffenheit als depiktionale Darstellungen aufgefasst werden (Schnotz 1994, S. 111 f; s. a. Cox 1999).

Grafische Darstellungen sind eine Form depiktionaler Darstellungen. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass zweidimensionale Darstellungsmöglichkeiten mit inhaltlichen Aspekten des darzustellenden Sachverhaltes in Verbindung gebracht werden (Stern et al. 2003, S. 192). In der Kinderzeichnung in Abb. 1 ist beispielsweise die Höhe eines Turms in Abhängigkeit von der für den Bau benötigten Zeit in Jahren grafisch dargestellt. Die notierten Ziffern „2" geben die Höhe eines jeden Turmabschnitts an. Durch ihre Anordnung übereinander stehen sie in Beziehung zur Gesamthöhe des Turms. Mit „1 J" wird jeweils die Bauzeit angegeben. Durch die Anordnung der

[3] Die Zitation CP bezieht sich auf die Collected Papers von Ch. S. Peirce. Die Ziffer vor dem Punkt gibt die Bandnummer an, die Ziffern danach die Nummer des jeweiligen Paragraphen.

„1 J“ neben jeweils einer „2“ und einem Turmabschnitt wird die Beziehung zwischen der Bauzeit und des in dieser Zeit gebauten Turmabschnitts deutlich gemacht: Pro Jahr wird ein Abschnitt mit der Höhe „2“ gebaut (für weitere Ausführungen vgl. Abschn. 4.2.1).

Abb. 1 Grafische Darstellung



In Grafiken können somit in einem Sachverhalt inhärente Beziehungen durch die Position der einzelnen Elemente in der Grafik direkt deutlich werden (vgl. Larkin und Simon 1987). Im Unterschied zu Texten ist für das Lesen einer grafischen Darstellung keine Reihenfolge vorgegeben. Das macht grafische Darstellungen für das Problemlösen besonders bedeutsam (vgl. Schnotz 2014).

In der Literatur werden verschiedene Ausprägungen grafischer Darstellungen unterschieden (Ott 2016, S. 36 ff). Das Kriterium zur Unterscheidung ist in diesen Klassifizierungen das Aussehen der Grafik, wie z. B. in der Unterscheidung zwischen Säulen- und Kreisdiagrammen, oder der Bezug zur Realität. So wird beispielsweise zwischen bildlichen und schematischen Darstellungen unterschieden (vgl. Peschek 2003; Hegarty und Kozhevnikov 1999). Während bildliche Darstellungen die visuellen Oberflächenmerkmale des Sachverhaltes abbilden, wie z. B realistische Gemälde, bilden schematische Darstellungen die Relationen des Sachverhaltes ab, wie z. B. Streifendiagramme (Hegarty und Kozhevnikov 1999, S. 688)[4]. Veloo und Lopez Real (1994, S. 670) unterscheiden ähnlich, sprechen jedoch von konkreten und symbolischen Darstellungen. Sie ordnen dazwischen semi-konkrete Darstellungen an.

[4] Diese Klassifizierung kommt der Unterscheidung depiktionaler Darstellungen aufgrund der Ähnlichkeit der repräsentierten und repräsentierenden Merkmale durch Schnotz (2001) nahe.

Die in der Literatur vorgeschlagenen grafischen Bearbeitungshilfen (z. B. Franke und Ruwisch 2010, S. 103 ff) sind außer der Situationsskizze schematische Darstellungen. Dies entspricht dem wichtigen Anliegen des Mathematikunterrichts, den Lernenden ein mathematisch-abstraktes Verständnis zu ermöglichen (vgl. Steinweg 2013).

2.1.3 Diagramm

Häufig werden unter Diagrammen verschiedene bildliche Darstellungen verstanden (vgl. Novick 2006; Diezmann 2002; Schnotz 1994; Larkin und Simon 1987). Für die Definition von Diagrammen ist jedoch nicht die Unterscheidung zwischen sprachlichen und bildlichen Darstellungen wesentlich (Hoffmann 2005, S. 126). Vielmehr sind Diagramme Zeichen mit einem relationalen Charakter, deren Grundlage eine Inskription bildet (Dörfler 2006, S. 210). Sätze, algebraische Formeln oder grafische Darstellungen können Diagramme sein.

Diagramme besitzen eine wohl definierte Struktur, die durch die Beziehung zwischen den einzelnen Teilen oder Elementen festgelegt ist. Es gibt Regeln für Umformungen und Zerlegungen sowie für die Erstellung, das Lesen und die Verwendung (Dörfler 2013, S 75 f). Zudem benötigen sie eine Art „Bedienungsanleitung“, die, wie z. B. die Bedeutung unserer Rechenzeichen, explizit verfügbar oder implizit in der Praxis des Umgangs mit ihnen gegeben sein kann. Durch Konventionen ist festgelegt, wodurch und wie im Diagramm welche Beziehung ausgedrückt oder gezeigt wird (Dörfler 2006, S. 210). Für das Erstellen und das Verstehen von Diagrammen ist es wesentlich, dass sie nicht in einem figurativen, sondern in einem relationalen Sinn verstanden werden (ebd.). Die Interpretation von Diagrammen ist im Unterricht nicht von vornherein festgelegt, sondern entsteht im sozialen Austausch (Dörfler 2006, S. 215) und kann sich beispielweise während eines Problemlöseprozesses fortlaufend weiterentwickeln (vgl. Schreiber 2010).

2.2 Forschungsbefunde

Neben der Sprache ist das grafische Darstellen ein Ausdrucksmittel, das von Kindern schon weit vor Schulbeginn erprobt ist (vgl. Rasch 2001; Sherin, 2000). Lernende jeglichen Alters können auf ein Vorwissen zur Herstellung und Verwendung grafischer Darstellungen zurückgreifen. Die Darstellung mathematischer Beziehungen, die für eine Verwendung grafischer Darstellungen im Sachrechnen notwendig ist, bereitet den Schülerinnen und Schülern jedoch häufig Probleme (Franke und Ruwisch 2010, S. 103; Hasemann 2006). Rasch (2001) hebt hervor, dass gerade Kinder zu Beginn ihrer Schulzeit den Alltagskontext detailliert abbilden, jedoch kaum die Aufgabenstruktur aufzeichnen (Rasch 2001, S. 303 f). Mit zunehmendem Alter der Kinder bzw. Voranschreiten in der Schullaufbahn (vgl. Veloo und Lopez Real 1994) oder einem Unterricht, der die Kinder darin unterstützt eine Vielfalt eigener Ideen und Darstellungen zu generieren (vgl. van Dijk et al. 2003), können sich die selbsterstellten grafischen Darstellungen der Kinder von einfachen, konkreten, stark auf den Aufgabenkontext bezogenen Darstellungen zu schematischen, grafischen Darstellungen entwickeln. Schematische Darstellungen erweisen sich für das Problemlösen als effektiv, während bildliche Darstellungen sich eher negativ auf den Lösungsprozess auswirken (Hegarty und Kozhenikov 1999; s. a. van Garderen und Montague 2003). Befunde einer Studie von Veloo und Lopez Real (1994) geben Hinweise darauf, dass jedoch weniger der gering ausgeprägte Realitätsbezug ausschlaggebend für ein erfolgreiches Problemlösen ist, als vielmehr die Darstellung der mathematischen Beziehungen und das Einbauen der gegebenen numerischen Information (Veloo und Lopez Real 1994, S. 673).

Hinsichtlich der Vollständigkeit grafischer Darstellungen ist der Adressatenbezug von Bedeutung: Darstellungen, die sich an eine potentielle Öffentlichkeit richten, sind vollständiger gestaltet und reichhaltiger beschriftet als Darstellungen, die zum eigenen Gebrauch angefertigt werden (Cox 1999). In Problemlöseprozessen fertigen Kinder oft minimalistische Darstellungen an, deren Bedeutung nicht immer explizit gemacht wird (Meira 2010).

Studien zur Nutzung grafischer Darstellungen als Bearbeitungshilfe mit Aufgaben unterschiedlicher Komplexität zeigen immer wieder, dass die Lernenden grafische Darstellungen kaum als Hilfsmittel für sich verwenden (vgl. Fagnant und Vlassis 2013; Lopez Real und Veloo 1993; van Essen und Hamaker 1990; Bender 1980a, 1980b). Die Lösungsraten sind jedoch höher unter den Kindern, die im Problemlöseprozess Zeichnungen anfertigen (vgl. Müller 1995; Veloo und Lopez Real 1994; Bender 1980a, 1980b). Bereits die Aufforderung, eine Zeichnung zu erstellen, hat positive Effekte auf die Lösungsraten (vgl. Müller 1995; Veloo und Lopez Real 1994). Das Anfertigen einer grafischen Darstellung garantiert nicht das Finden einer korrekten Lösung, kann jedoch die Chance erhöhen, dass das Problem richtig konzeptualisiert wird (van Essen und Hamaker 1990, S. 309). Gründe für die geringe Nutzung grafischer Bearbeitungshilfen werden im mangelnden Wissen und der fehlenden Erfahrung des Nutzens derartiger Bearbeitungshilfen gesehen (van Essen und Hamaker 1990, S. 310). Dementsprechend werden in einigen Studien Fördermaßnahmen untersucht. Dabei wird v. a. die Erfahrung des Nutzens der Bearbeitungshilfe thematisiert. Ergebnisse einer Studie von van Essen und Hamaker (1990) legen nahe, dass das Alter der Kinder für das Entwickeln eigener grafischer Darstellungen zur Aufgabenlösung eine Rolle spielt. Kinder der 1. und 2. Jahrgangsstufe fertigten nach einem kurzfristig angelegten Training akkuratere und vollständigere grafische Darstellungen an, konnten im Gegensatz zu Kindern der 5. Jahrgangsstufe den Nutzen grafischer Darstellungen als Lösungshilfe jedoch nicht erkennen.

In anderen Studien wird das Erstellen vorgegebener grafischer Darstellungen als Lösungshilfen trainiert. Sie zeigen kein einheitliches Bild. Durch einen Unterricht, der das Erstellen vorgegebener grafischer Diagramme (Netzwerk, Matrix, Baumdiagramm, Teil-Ganzes-Diagramm) (Novick 2006) trainiert, ist vielfach ein positiver Einfluss auf deren Nutzung durch die Lernenden und den Lösungsprozess feststellbar (vgl. Fagnant und Vlassis 2013; van Garderen 2007; Diezmann 2002). Dies widerspricht Ergebnissen von Pantziara et al. (2009) und van Dijk et al. (2003), in deren Studien mit Kindern der 5. und 6. Jahrgangsstufe die vorgegebenen grafischen Diagramme die Lernenden teils an der Lösung der Aufgabe hinderten. Als Grund vermuten die Autorinnen und Autoren, dass die vorgegebenen Diagramme nicht zu den persönlichen Präferenzen und Vorstellungen der Lernenden passen (Pantziara et al. 2009) sowie dass die Kinder Schwierigkeiten haben, sie zu verstehen, und sie darum oft ohne Verständnis anwenden (van Dijk et al. 2003). Pantziara et al. (2009) erachten auch die Interpretation vorgegebener grafischer Diagramme als wesentlich für die Verbesserung des Umgangs damit im Lösungsprozess: In ihrer Studie versuchen Lernende die vorgegebenen grafischen Diagramme in konkrete Bilder umzuwandeln, um sie interpretieren zu können.

In einer Vergleichsstudie in der 5. Jahrgangsstufe zum Ansatz, Kinder eigene grafische Darstellungen entwickeln und mit ihren Klassenkameraden in Austausch darüber treten zu lassen, und dem Ansatz, vorgegebene Darstellungen zur Problemlösung auszuwählen, schnitten die Kinder der ersten Gruppe beim Problemlösen signifikant besser ab (vgl. van Dijk et al. 2003). Das Erfinden grafischer Darstellungen in Ko-Konstruktion scheint den Kindern tiefere Einsichten in deren Bedeutung zu geben und führt so dazu, dass sie flexibler zum Problemlösen angewandt werden können (van Dijk et al. 2003, S. 184). Insgesamt rückt durch unterrichtliche Aushandlungen und Reflexionen der Darstellungsprozess ins Zentrum des Unterrichts (ebd.).

Damit Reflexion im Unterricht stattfinden und sich bei den Schülerinnen und Schülern eine Bewusstheit für die Möglichkeiten des grafischen Darstellens entwickeln kann, ist es notwendig, dass die Lernenden eine innere Distanzierung zur Aufgabe oder zur eigenen Aufgabenbearbeitung einnehmen und bereit sind, sich auf andere Wege einzulassen (Mason 1987). Ähnlich beschreibt Freudenthal (1983) Reflexion als einen Standpunktwechsel. Durch Standpunktwechsel können Umdeutungsprozesse stattfinden (Schülke 2013, S. 52). Schülke arbeitet heraus, dass „Momente der Irritation" (Schülke 2013, S. 111) im Unterricht Standpunktwechsel hervorrufen können. Dies kann v. a. geschehen, wenn die Kinder untereinander kommunizieren, oder auch durch Impulse der Lehrkraft hervorgerufen werden (Schülke 2013, S. 294 f). Auch die Mehrdeutigkeit grafischer Darstellungen kann Momente der Irritation provozieren (vgl. Söbbeke 2005).

Reflexionsprozesse können in kommunikativen Unterrichtssettings angeregt werden (vgl. Schülke 2013; Winkel 2012). Darstellungen können als Inskriptionen Grundlage für Reflexionsgespräche sein (vgl. Abschn. 2.1.1). Hinsichtlich des Problemlösens konnte gezeigt werden, dass kommunikative Unterrichtssettings, die zu Reflexionen über verschiedene Lösungswege anregen, zur Lösungsfindung und dem Aufbau von Wissen beitragen (vgl. Sturm 2014; Nührenbörger und Schwarzkopf 2010).

2.3 Forschungsdesiderate zum grafischen Darstellen im Sachrechnen

Grafische Darstellungen unterscheiden sich von anderen im Mathematikunterricht üblichen Notationen (vgl. Abschn. 2.1.1). In ihrer Notation können Schwierigkeiten der Lernenden begründet sein (Scherer und Moser Opitz 2010, S. 171). Befunde darüber, was Kinder in ihren grafischen Darstellungen beachten, wenn sie zum Darstellen aufgefordert werden, sowie Konzepte dazu, welche Elemente für die grafische Darstellung von in Textaufgaben gegebenen mathematischen Sachverhalten notwendig sind, fehlen bisher. Fragestellungen aus diesem Bereich wurden im ersten Teil des Dissertationsprojekts bearbeitet (vgl. Ott 2016).

Offene Fragen betreffen auch den Erstellungsprozess von grafischen Darstellungen. Zwar schließen Studien aufgrund der Lösungsrichtigkeit darauf, ob grafische Darstellungen erfolgreich verwendet werden konnten, der Erstellungsprozess ist jedoch noch wenig untersucht. Auch die Interpretation grafischer Darstellungen im Sachrechnen kann wichtig für die Entwicklung von Darstellungsfähigkeiten sein (vgl. Abschn. 2.2). Worauf Kinder hierbei fokussieren und wie sich dabei Erkenntnis entwickelt, ist noch unklar.

Offene Fragen bestehen auch hinsichtlich möglicher Förderkonzepte für das grafische Darstellen. Verschiedene Ansätze zur Nutzung grafischer Darstellungen als Bearbeitungshilfen wurden erprobt (vgl. Abschn. 2.2). Die Ergebnisse zeigen kein einheitliches Bild. Förderkonzepte, die das grafische Darstellen von Sachaufgaben als eigene mathematische Fähigkeit untersuchen, sind bisher kaum erforscht. Ebenso fehlen Befunde, wie sich eine längerfristige Förderung auswirkt.

3 Forschungsfragen

Befunde zeigen, dass gemeinsame Aushandlungsprozesse über selbst erstellte grafische Bearbeitungshilfen und Problemlösestrategien positive Effekte auf das Problemlösen haben können. Unklar ist, wie sich Reflexionen über selbst erstellte grafische Darstellungen der Kinder, die als eine Möglichkeit zur Darstellung mathematischer Strukturen betrachtet werden, auf die Darstellungsfähigkeiten der Lernenden auswirken (vgl. Abschn. 2.1.3). Ziel der hier vorgestellten Studie ist es, anhand von Kinderdokumenten zu untersuchen, inwieweit sich eine auf die Entwicklung von Bewusstheit ausgerichtete Intervention auf die Darstellungsfähigkeiten[5] der Schülerinnen und Schüler auswirkt.

Die Fähigkeit zum grafischen Darstellen wird im Projekt als Voraussetzung für den Einsatz als Bearbeitungshilfe angesehen. Deshalb wird auch erforscht, inwieweit sich die Intervention auf die Lösungsraten der Lernenden auswirkt. Folgende Forschungsfragen werden untersucht:

1. Wirkt sich die Intervention positiv auf die Beachtung der konstituierenden Merkmale für grafische Darstellungen zu Textaufgaben aus?
2. Wirkt sich die Intervention positiv auf die Lösungsraten zu Textaufgaben aus?

Die Fragen konzentrieren sich auf messbare Veränderungen auf Grundlage der Kinderdokumente. Da Untersuchungen zu selbstgenerierten grafischen Bearbeitungshilfen von Lernenden zeigen, dass die Darstellungen im Laufe von Interventionen mit Aushandlungsprozessen zunehmend weniger realitätsbezogen und stärker auf mathematische Beziehungen ausgerichtet werden (vgl. Abschn. 2.1.2), und Reflexionsphasen Bewusstheit aufbauen können (vgl. Abschn. 2.2), wird abgeleitet, dass sich auch die hier evaluierte Intervention positiv auf die Beachtung der konstituierenden Merkmale auswirkt. Ein wesentliches Problem beim Erstellen grafischer Bearbeitungshilfen wird in der mangelnden Fähigkeit gesehen, die mathematischen Beziehungen der Aufgabe grafisch abzubilden (vgl. Abschn. 2.1.2). Da davon ausgegangen wird, dass die Kinder sich in dieser Hinsicht durch die Intervention verbessern, wird auch hinsichtlich der Lösungsraten eine positive Auswirkung angenommen.

Folgende Hypothesen werden überprüft:

H1 Kinder der Interventionsgruppe beachten nach der Intervention häufiger konstituierende Merkmale grafischer Darstellungen, das heißt

a) die mathematische Struktur

b) die mathematische Passung

c) einen hohen Abstraktionsgrad

in ihren Dokumenten als Kinder der Kontrollgruppen.

[5] Als Darstellungsfähigkeiten wird die Beachtung der im ersten Teil des Projekts herausgearbeiteten konstituierenden Merkmale grafischer Darstellungen zu Textaufgaben angesehen: die mathematische Struktur, die mathematische Passung und der Abstraktionsgrad (vgl. Ott 2016). Diese werden als Analyseinstrument in Abschn. 4.2.1 genauer erläutert.

H2 Kinder der Interventionsgruppe lösen nach der Intervention Textaufgaben häufiger richtig als Kinder der Kontrollgruppen.

4 Methodische Überlegungen

Die vorliegende Untersuchung ist der Interventions- und Evaluationsforschung zuzuordnen (Bortz und Döring 2006, S. 101). Im Folgenden werden die zur Beantwortung der Forschungsfragen und Prüfung der Hypothesen geeigneten Erhebungs- und Auswertungsmethoden beschrieben.

4.1 Erhebungsmethoden

Im Zentrum des Forschungsinteresses stehen selbstgenerierte grafische Darstellungen der Schülerinnen und Schüler. Diese Inskriptionen können als Eigenproduktionen (vgl. Selter 1994) der Lernenden verstanden werden. Forschungsmethodisch stellen Eigenproduktionen das Äquivalent zur schriftlichen offenen Befragung im verbalen Bereich dar (Hussy et al. 2013, S. 243) und sind u. a. besonders zur Erhebung informeller Fähigkeiten geeignet (Voßmeier 2012, S. 91 f), was sie für diese Arbeit bedeutsam macht. Das Erstellen von Eigenproduktionen kann in qualitative Paper-Pencil-Tests integriert werden (vgl. van den Heuvel-Panhuizen und Gravemeijer 1991).

4.2 Auswertungsmethoden

Die Auswertung der erhobenen Daten muss in der vorliegenden Studie zwei Schritte umfassen: Die qualitative Analyse der Kinderdokumente mit einer anschließenden Quantifizierung der Daten sowie die statistische Hypothesenprüfung.

4.2.1 Analyse grafischer Kinderdokumente

Zur Analyse von selbstgenerierten grafischen Darstellungen zu Textaufgaben existiert in der mathematikdidaktischen Forschung bisher kein Analyseinstrument. Im ersten Teil des Dissertationsprojekts wurde deshalb mittels einer Kombination aus dem induktiven Vorgehen der qualitativen Inhaltsanalyse (vgl. Mayring 2010) und dem theoretischen Kodieren (vgl. Strauss und Corbin 1996) auf Basis von 438 Kinderdokumenten ein Theorieentwurf und ein Analyseinstrument für grafische Darstellungen zu Textaufgaben entwickelt. Das Analyseinstrument ermöglicht es, jedes Kinderdokument hinsichtlich verschiedener Merkmale zu analysieren und jeweils eindeutig einer Kategorie zuzuordnen. Die sehr gute Interraterreliabilität mit Werten zwischen $K = 0{,}81$ und $K = 0{,}99$ in der Erprobung ermöglichen es, dieses Analyseinstrument im hier vorgestellten zweiten Teil des Dissertationsprojekts zu verwenden. Die Objektivität der Auswertung wird durch die Vorgabe eines Analyseleitfadens gewährleistet (Ott 2016, S. 147 ff). Durch die Analyse der Kinderdokumente von unabhängigen Kodiererinnen kann wiederum die Interraterreliabilität bestimmt werden (vgl. Wirtz und Caspar 2002). Die so qualitativ erhobenen Daten können quantifiziert und anschließend quantitativ weiterverarbeitet werden (Bortz und Döring 2006, S. 298).

Für die Analyse von selbstgenerierten grafischen Darstellungen zeigt sich die Unterscheidung der drei Merkmale „mathematische Struktur“, „mathematische Passung“ und „Abstraktionsgrad“ als wesentlich. Die Beachtung dieser Merkmale wird in der vorliegenden Studie als Darstellungsfähigkeiten angesehen und im Folgenden anhand von sechs exemplarischen selbstgenerierten grafischen Darstellungen von Kindern der 1. und 2. Jahrgangsstufe kurz erläutert. Die grafischen Darstellungen beziehen sich auf folgende Textaufgabe: *Es lebte einst ein König, der wollte einen 11 m hohen Turm bauen. Seine Bauleute brauchten dafür mehrere Jahre. In jedem Jahr schafften sie zwei Meter. Wie lange dauerte es, bis der Turm fertig war?*

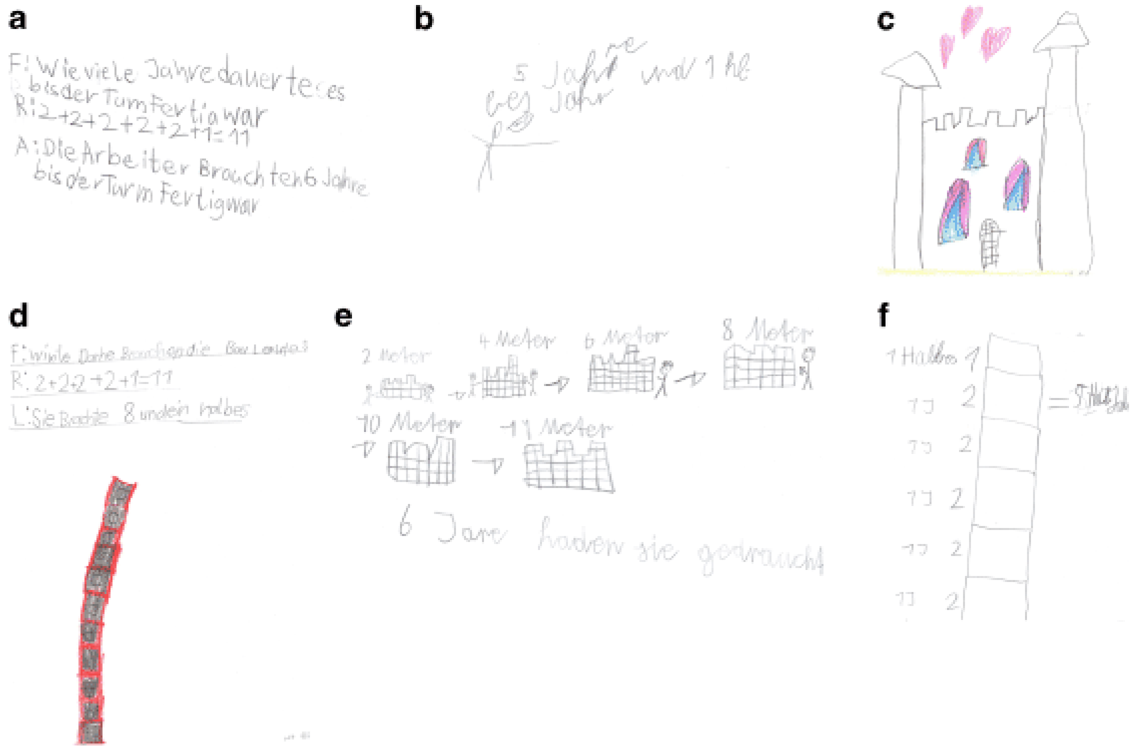
Mathematische Struktur Eine mathematische Struktur kann allgemein in Anlehnung an mengentheoretische Überlegungen definiert werden (Rinkens 1973, S. 72 ff): Beziehungen zwischen amorphen Elementen einer Menge können durch die Definition von Verknüpfungen auf der Menge bestimmt werden. Der Menge wird dadurch eine Struktur aufgeprägt; die Elemente sind Träger dieser Struktur.

In Textaufgaben wird eine mathematische Struktur mit sprachlichen Mitteln geschaffen. Nach syntaktischen Regeln werden die Nomen bzw. Größen durch Verben und Präpositionen miteinander in Beziehung gesetzt (vgl. Abschn. 2.1.1). So wird eine Verknüpfung zwischen den in der Aufgabe gegebenen Größen definiert. Die Größen tragen die dadurch festgelegte mathematische Struktur.

Für eine grafische Darstellung der in der Textaufgabe gegebenen mathematischen Struktur bedarf es ebenfalls Träger, denen die im Text gegebene Verknüpfung aufgeprägt werden kann. Dazu müssen Objekte, z. B. Gegenstände oder Personen, im Text identifiziert werden, zwischen denen die Verknüpfung verbal festgelegt ist. Diese sind für die grafische Darstellung der mathematischen Struktur relevant. Für die strukturrelevanten Objekte werden in der grafischen Darstellung Zeichen eingeführt, welche die im Text gegebene Verknüpfung tragen können, indem zweidimensionale Darstellungsmöglichkeiten ausgenutzt werden. Dazu werden die Zeichen so auf dem Papier angeordnet, dass die durch den Text festgelegte mathematische Beziehung zwischen den strukturrelevanten Objekten dargestellt wird. Relationssymbole sind dafür nicht notwendig (vgl. Abschn. 2.1.1). Wesentlich für die mathematische Struktur einer grafischen Darstellung sind die Zeichen für strukturrelevante Objekte und deren Anordnung. Erfüllen die grafischen Darstellungen der Lernenden diese Eigenschaften, werden sie in der vorliegenden Arbeit als diagrammatisch bezeichnet (vgl. Abschn. 2.1.1). Die Regeln für ihre Erstellung ergeben sich aus den in der Aufgabe gegebenen mathematischen Verknüpfungen.

Es kann zwischen sechs Kategorien der mathematischen Struktur unterschieden werden: Nicht grafische Darstellungen wie Abb. 2a enthalten keine grafischen Elemente und bestehen nur aus Text oder Rechnungen. Textferne grafische Darstellungen enthalten grafische Elemente, jedoch besteht kein inhaltlicher oder mathematischer Bezug zum Text, wie in Abb. 2b. Dahingegen besteht bei illustrativen grafischen Darstellungen wie in Abb. 2c ein inhaltlicher Bezug zum Text, mathematische Aspekte werden nicht berücksichtigt. In objektbezogenen grafischen Darstellungen werden strukturrelevante Objekte grafisch abgebildet, in Abb. 2d die elf Meter in den elf Abschnitten, mathematische Beziehungen jedoch nicht. In diagrammatischen grafischen Darstellungen werden Beziehungen zwischen strukturrelevanten Objekten erkennbar, wie in Abb. 2e,f. Während in Abb. 2f die Beziehungen zwischen Jahren und Metern sowie zwischen den einzelnen Abschnitten und der Gesamthöhe *explizit* verdeutlicht sind, bleiben sie in Abb. 2e *implizit*.

Abb. 2 Grafische Darstellungen zu einer Textaufgabe (vgl. Ott 2016, S. 157 ff)



Mathematische Passung Unter der mathematischen Passung wird die Übereinstimmung der Textaufgabe mit der grafischen Darstellung in Hinblick auf die mathematische Strukturdarstellung verstanden (vgl. Abschn. 2.1.1). Eine mathematische Passung zwischen einer Textaufgabe und einer grafischen Darstellung besteht genau dann, wenn sich beide hinsichtlich der Aspekte der mathematischen Struktur entsprechen, d. h. hinsichtlich der Objekte (Größen und Zeichen für strukturrelevante Objekte) und der Verknüpfungen (Verben bzw. Propositionen und Anordnung der strukturrelevanten Objekte).

Nicht grafische, textferne und illustrative Darstellungen weisen per se keine mathematische Passung in diesem Sinn auf. Objektbezogene und diagrammatische grafische Darstellungen können jeweils bezüglich der Größen (Maßzahlen und Maßeinheiten) und Verknüpfungen eine *vollständige Passung*, eine *teilweise Passung* oder *keine Passung* aufweisen. Zudem können die Maßzahlen, Maßeinheiten und Verknüpfungen *nicht beachtet* sein. Beispielsweise besteht in Abb. 2f sowohl hinsichtlich der Maßzahlen (11, 2), der Maßeinheiten (Meter, Jahre) als auch der Verknüpfungen (Beziehung Meter zu Jahren, Addition der Meter, Addition der Jahre) eine vollständige Passung. In Abb. 2d wird die Verknüpfung nicht beachtet. Hinsichtlich Maßzahlen (11) und Maßeinheiten (Länge) besteht die Passung teilweise.

Abstraktionsgrad Der Begriff „Abstraktion" wird in der Literatur unterschiedlich verwendet (vgl. Peschek 1988). Nach Peschek (1988) kann Abstraktion als eine Aufmerksamkeitsfokussierung definiert werden (S. 182). Der Abstraktionsgrad einer grafischen Darstellung wird hier dementsprechend als Fokussierung auf die Darstellung der mathematischen Aspekte beschrieben. Diese Fokussierung lässt sich an zwei Indikatoren ablesen:

- Der erste Indikator ist die Fokussierung auf die strukturrelevanten Objekte, d. h. in der Darstellung sind außer den strukturrelevanten Objekten keine anderen Objekte dargestellt.

- Der zweite Indikator ist die Fokussierung auf die mathematisch wesentlichen Eigenschaften der strukturrelevanten Objekte, d. h. die für die Darstellung der strukturrelevanten Objekte eingeführten Zeichen fokussieren nur auf deren mathematische Eigenschaft und sind nicht weiter gestaltet oder ausgeschmückt.

Die Indikatoren sind in den Kinderdokumenten unterschiedlich stark ausgeprägt. Die Ausprägung kann jeweils als niedrig oder hoch eingestuft werden. Abb. 2f ist ein Beispiel bei dem beide Indikatoren als hoch angesehen werden können. In Abb. 2e sind beide Indikatoren niedrig, da zusätzlich Männchen gezeichnet werden (Indikator 1) und die einzelnen Turmbilder mit Steinen und Zinnen ausgeschmückt sind (Indikator 2). In Abb. 2d ist Indikator 1 hoch, Indikator 2 niedrig, da die einzelnen Abschnitte mit Farbe und Verzierungen ausgeschmückt werden.

4.2.2 Hypothesenprüfung

Die formulierten Unterschiedshypothesen können inferenzstatistisch geprüft werden. Da die Hypothesen Einflüsse der Gruppenzugehörigkeit, des Testzeitpunkts sowie der Wechselwirkung zwischen beiden beinhalten, ist zur Hypothesenprüfung jeweils eine zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung geeignet (Eid et al. 2011, S. 471 ff). Eine Unterschiedshypothese kann angenommen werden, wenn „die Interaktion zwischen dem Gruppierungsfaktor und dem Messwiederholungsfaktor statistisch bedeutsam ist" (Bortz und Döring 2006, S. 550). In Ergänzung zum inferenzstatistischen Vorgehen und zur Beurteilung der Größe der Effekte können ferner Effektstärken (η_p^2 bzw. f) [6] angegeben und mit den bei Cohen (1992) definierten Werten verglichen werden.

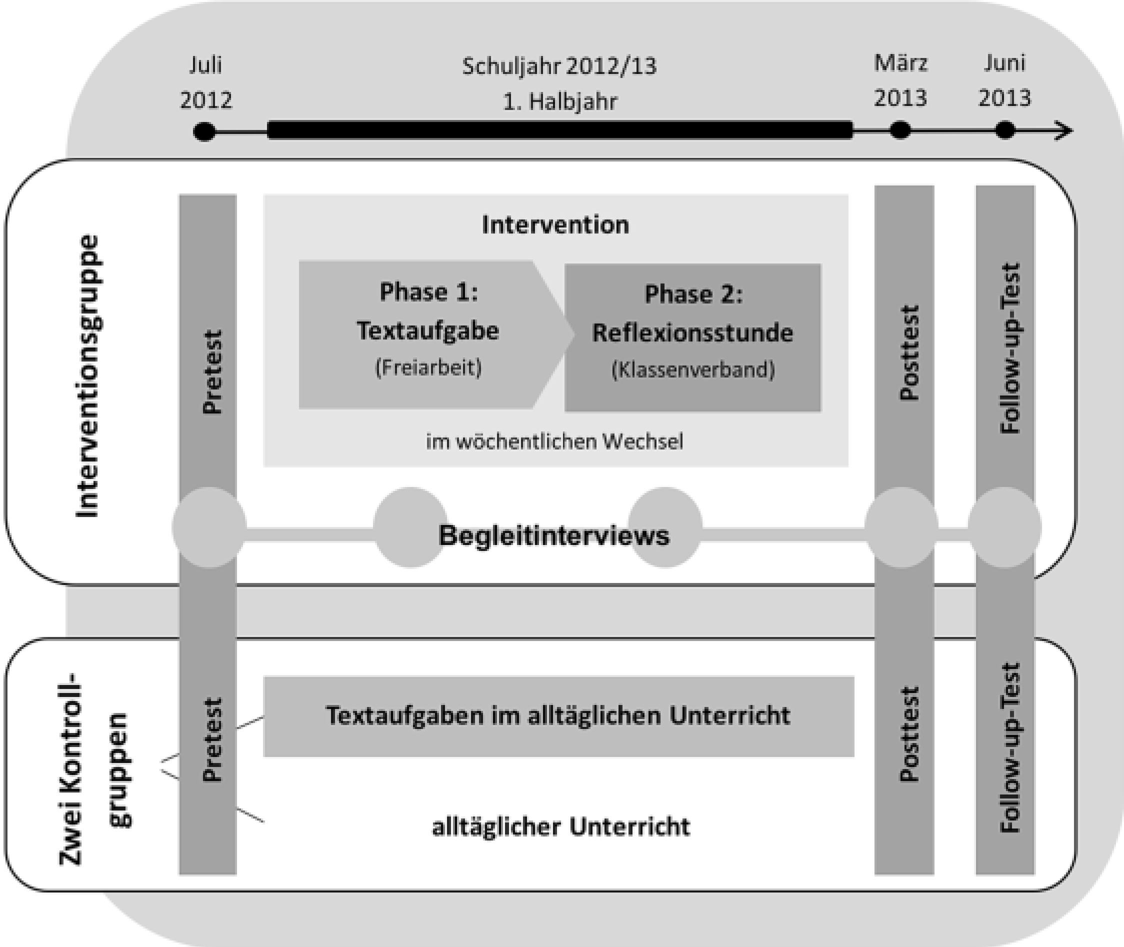
5 Design und Durchführung

Die Studie ist als Längsschnitt in einem Drei-Gruppen-Design mit drei Testzeitpunkten (Pretest, Posttest, Follow-up-Test) und Begleitinterviews angelegt (vgl. Abb. 3). Den Lehrkräften von Kontrollgruppe 1 werden die Aufgaben der Intervention zur Verfügung gestellt. Kontrollgruppe 2 erfährt keinerlei Intervention. Zur qualitativen Analyse der Interviews und Entwicklungsverläufe sei auf Ott (2016) verwiesen.

[6] Eine Umrechnung von η_p^2 in f erfolgt anhand folgender Formel (Universität Zürich 2016):

$$f = \sqrt{\frac{\eta_p^2}{1-\eta_p^2}}$$

Abb. 3 Gesamtdesign der Studie (vgl. Ott 2016, S. 196)



5.1 Intervention

Die Intervention basiert auf einem sozial-konstruktiven Verständnis des Lernens und möchte bei den Kindern eine Bewusstheit (vgl. Mason 1987) für das grafische Darstellen entwickeln. Sie ist in zwei Phasen angelegt, die jeweils im wöchentlichen Wechsel stattfinden (vgl. Abb. 3). Insgesamt wurden neun Interventionseinheiten durchgeführt.

In *Phase 1* werden die Schülerinnen und Schüler dazu aufgefordert, in der Freiarbeit jeweils eine grafische Darstellung zu einer vorgegebenen Textaufgabe anzufertigen, die alles enthalten soll, was die Lernenden für das Verstehen und Lösen der Aufgabe wichtig finden. Die Darstellung soll so gezeichnet sein, dass sie für andere verständlich ist. Jedes Kind erhält ein Arbeitsblatt mit der Textaufgabe und ansonsten freiem Platz für die eigene grafische Darstellung. Statt Routinen anzuwenden sollen die Kinder dazu angeregt werden, in ihrer Zone der aktuellen Entwicklung (vgl. Wygotski 1964) ihre eigene Möglichkeit der grafischen Darstellung zu finden. Bereits die grafische Darstellung verbal gegebener mathematischer Beziehungen erfordert von den Lernenden Reflexionsleistungen (Hess 2012, S. 191 ff). Dabei ist das Entwickeln der grafischen Darstellungen mehr als eine bloße Übersetzung. Ebenso wie beim Lösen von Sachaufgaben (vgl. Schwarzkopf 2006), müssen die Kinder beim grafischen Darstellen flexible Beziehungen zwischen der Sache und der Mathematik konstruieren (vgl. Abschn. 4).

In *Phase 2* bilden jeweils im Vorfeld durch die Studienleiterin ausgewählte grafische Darstellungen der Lernenden zur Textaufgabe der vergangenen Woche die Grundlage der Reflexionsgespräche im Klassenverband. Die Auswahl erfolgt so, dass möglichst verschiedene in der Klasse aufgetretene Darstellungsweisen gezeigt und reflektiert werden. Eine vergrößerte Kopie der ausgewählten Kinderdokumente wird an die Tafel geheftet.

Die Lernenden sollen die jeweils gezeigte grafische Darstellung erklären, interpretieren und hinterfragen, die Interpretationen anderer nachvollziehen, sie gegenüber eigenen Darstellungsweisen abwägen und aufgabenspezifische Besonderheiten diskutieren. Momente der Irritation können bereits durch die Mehrdeutigkeit der Darstellungen hervorgerufen werden (vgl. Abschn. 2.2). Zudem können sie dadurch provoziert werden, dass die gezeigten Darstellungen untereinander oder in Bezug zur selbst entwickelten grafischen Darstellung jedes Kindes hinsichtlich der mathematischen Struktur mit den Zeichen für die strukturrelevanten Objekte oder deren Anordnung, der mathematischen Passung, des Abstraktionsgrads oder der Vollständigkeit verschieden sind. Die Reflexionsprozesse bieten den Lernenden die Möglichkeit, sich in die Zone der nächsten Entwicklung (vgl. Wygotski 1964) zu bewegen.

Da die Interpretation grafischer Darstellungen für die Kinder eine Herausforderung darstellt (vgl. Abschn. 2.1.2), werden die grafischen Darstellungen in einer Reflexionseinheit zunächst einzeln nacheinander betrachtet und dann in Beziehung zueinander gesetzt. Bis zu drei verschiedene grafische Darstellungen werden so reflektiert. Unterstützt und angeregt werden die Reflexionsprozesse durch die folgenden Impulse, die sich an der Theorie zu grafischen Darstellungen zu Textaufgaben orientieren (vgl. Abschn. 4.2.1): „Was hat sich das Kind vermutlich gedacht? Was gefällt dir an der Darstellung besonders gut? Warum? Was vermutest du, warum das Kind die Objekte/Beziehungen/Beschriftungen so aufgezeichnet hat? Hast du selbst auch ähnlich gezeichnet? Würdest du etwas in deine Darstellung übernehmen?“ Im Verlauf der Intervention können die grafischen Darstellungen zunehmend als stumme Impulse selbst wirken.

5.2 Aufgabenkonzeption

Sowohl die Aufgaben der Intervention als auch die Testaufgaben sind als Textaufgaben entwickelt, da Textaufgaben zwar einen Sachbezug haben, der Schwerpunkt jedoch auf den sprachlich dargestellten mathematischen Strukturen liegt (Schipper 2009, S. 242). Die Textaufgaben orientieren sich an den Vorgaben des zur Zeit der Studie gültigen bayerischen Lehrplans für die 3. Jahrgangsstufe (vgl. BY 2000).

Als Hauptkriterium bei der Entwicklung der Textaufgaben wurde beachtet, inwieweit bereits die Formulierung der Aufgabe das grafische Darstellen der mathematischen Struktur sprachlich nahelegt. Es werden sowohl Aufgaben verwendet, deren für die mathematische Struktur wesentliche Objekte zeichenbar sind und deren Anordnung im Aufgabentext beschrieben wird, als auch Aufgaben, bei denen mathematisch relevante Objekte durch ihre physikalischen Eigenschaften nicht direkt grafisch umsetzbar sind. Für eine grafische Umsetzung müssen Zeichen für die Objekte sowie deren Anordnung erfunden werden.

5.3 Paper-Pencil-Test

Die acht Testaufgaben des Paper-Pencil-Tests orientieren sich an den mathematischen Inhaltsbereichen der Intervention. Darüber hinaus sind die Aufgaben so gewählt, dass sie teilweise hinsichtlich der Objekte, Verknüpfungen und Formulierungen analog zu den Aufgaben der Intervention gestaltet sind, teilweise Transferleistungen erfordern.

Der Paper-Pencil-Test wurde von verschiedenen geschulten Testleiterinnen zu jedem Testzeitpunkt in jeder Klasse auf zwei Tage verteilt durchgeführt. Hierzu wurden die acht Testitems auf zwei Testhefte verteilt. Jede Textaufgabe ist auf ein ansonsten weißes A4-Blatt gedruckt. Jedes Testheft ist auf eine Dauer von 40 min angelegt. Die Kinder werden aufgefordert, alles aufzuzeichnen, was sie für die Lösung der jeweiligen Aufgabe wichtig finden, und zwar so, dass die Testleiterin nachher verstehen kann, was und wie das Kind gedacht hat. Wenn die Kinder die Aufgabe lösen können, sollen sie auch ihre Lösung aufschreiben.

5.4 Rahmenbedingungen und Stichprobe

Die Studie wurde im Schuljahr 2012/13 in Bayern durchgeführt. Daran beteiligt waren insgesamt sechs Schulklassen der Jahrgangsstufe 3, die aus drei verschiedenen Grundschulen in Stadt- und Stadtrandlage einer mittelgroßen Stadt stammten. Von jeder Schule nahmen zwei dritte Klassen an der Untersuchung teil und bildeten jeweils eine Untersuchungsgruppe.

Die Interventionsgruppe bestand insgesamt aus 35 Kindern (18 männlich, 17 weiblich). Das Durchschnittsalter der Kinder betrug 8 Jahre und 4 Monate (jüngstes Kind: 7 Jahre, 5 Monate; ältestes Kind: 9 Jahre). Vier Kinder waren zweisprachig. Kontrollgruppe 1 bestand insgesamt aus 43 Kindern (21 männlich, 22 weiblich). Das Durchschnittsalter der Kinder betrug 8 Jahre und 4 Monate (jüngstes Kind: 7 Jahre, 8 Monate; ältestes Kind: 9 Jahre, 10 Monate). Acht Kinder waren zweisprachig. Kontrollgruppe 2 bestand insgesamt aus 46 Kindern (11 männlich und 35 weiblich). Das Durchschnittsalter der Kinder betrug 8 Jahre und 4 Monate (jüngstes Kind: 7 Jahre, 6 Monate; ältestes Kind: 10 Jahre, 2 Monate). Zwei Kinder waren zweisprachig.

Die Tests wurden in Parallelklassen von zwei verschiedenen Testleiterinnen jeweils gleichzeitig durchgeführt. An allen sechs Testtagen und damit am gesamten Längsschnitt nahmen insgesamt in jeder Gruppe 33 Kinder teil. Die Intervention wurde von der Studienleiterin durchgeführt.

6 Ergebnisse

Die Studie verfolgt die Frage, inwieweit sich die auf grafische Darstellungsbewusstheit ausgerichtete Intervention auf die Darstellungsfähigkeiten der Schülerinnen und Schüler sowie auf die Lösungsraten auswirkt. Die 2780 Kinderdokumente wurden dazu von zwei Raterinnen kodiert. Die Interraterreliabilitäten zu den drei Testzeitpunkten liegen zwischen $K = 0{,}95$ und $K = 0{,}98$ und sind damit als sehr gut anzusehen. Um die Möglichkeit des Erkennens unerwarteter negativer Interventionseffekte nicht von vornhinein auszuschließen, werden trotz gerichteter Formulierung der inhaltlichen Hypothesen (vgl. Abschn. 3) die statistischen Hypothesen beidseitig geprüft. Da ein Vergleich über alle drei Testzeitpunkte nur bei einer Stichprobe sinnvoll ist, die die Kinder enthält, die an allen drei Tests teilgenommen haben, wird hierzu die verkleinerte Stichprobe (N = 33 in jeder Gruppe) verwendet. Das Kriterium einer Stichprobengröße >30 in jeder Gruppe als Voraussetzung für die Durchführung einer Varianzanalyse ist somit erfüllt. Die jeweils interessierenden Ausprägungen jedes Merkmals werden mit 1, die anderen mit 0 kodiert, und Summenwerte über alle acht Aufgaben eines Testzeitpunkts gebildet. Ein Gesamtmittelwert in einer Untersuchungsgruppe von 8 würde bedeuten, dass alle Kinderdokumente dieser Gruppe die interessierende Ausprägung des Merkmals grafisch darstellen. Tab. 1 gibt einen Überblick über die Haupt- und Interaktionseffekte.

Tab. 1 Haupteffekte der Faktoren Testzeitpunkt (TZP) und Gruppe (G) sowie Interaktionseffekte (TZP x G)

Konstituierendes Merkmal		Faktor	F-Wert	df	*p*-Wert	Partielles Eta-Quadrat
Mathematische Struktur	Strukturrelevante Objekte und Verknüpfungen	TZP	30.020	1845	<0,001	0,238
		G	6059	2	0,003	0,112
		TZP × G	*11.591*	*3690*	*<0,001*	*0,195*
	Verknüpfungen	TZP	94.364	2	<0,001	0,496
		G	11.805	2	<0,001	0,197
		TZP × G	*14.870*	*4*	*<0,001*	*0,237*
Mathematische Passung	Maßzahlen	TZP	57.400	2	<0,001	0,374
		G	2433	2	0,093	0,048
		TZP × G	*12.267*	*4*	*<0,001*	*0,204*
	Maßeinheiten	TZP	79.441	2	<0,001	0,453
		G	4423	2	0,015	0,084
		TZP × G	*24.353*	*4*	*<0,001*	*0,337*
	Verknüpfungen	TZP	82.114	2	<0,001	0,461
		G	11.102	2	<0,001	0,188
		TZP × G	*14.556*	*4*	*<0,001*	*0,233*
Abstraktionsgrad	Indikator 1	TZP	28.168	1779	<0,001	0,227
		G	1886	2	0,157	0,038
		TZP × G	*3060*	*3559*	*0,023*	*0,060*
	Indikator 2	TZP	13.119	2	<0,001	0,120
		G	0,392	2	0,677	0,008
		TZP × G	*0,309*	*4*	*0,872*	*0,006*
Lösungsrichtigkeit		TZP	41,41	2	<0,001	0,301
		G	1,46	2	0,237	0,030
		TZP × G	*1,47*	*4*	*0,213*	*0,030*

6.1 Vergleich der mathematischen Struktur

Für die mathematische Struktur einer grafischen Darstellung sind Zeichen für strukturrelevante Objekte und deren Anordnung zur Abbildung der Verknüpfung wesentlich. Gerade letzteres wird für die Kinder als sehr schwierig erachtet (vgl. Abschn. 2.1.2). In einem ersten Schritt wird deshalb die

Beachtung beider Elemente der mathematischen Struktur (strukturrelevante Objekte und Verknüpfungen) getestet, in einem zweiten Schritt wird spezifischer nur die Beachtung der Verknüpfungen untersucht. Tab. 2 zeigt die Entwicklung der Mittelwerte der Gruppen im Vergleich. Der Mauchly-Test weist nach, dass die Sphärizität als Voraussetzung für Varianzanalysen verletzt ist. Deshalb wird die Greenhouse-Geisser-Korrektur vorgenommen.

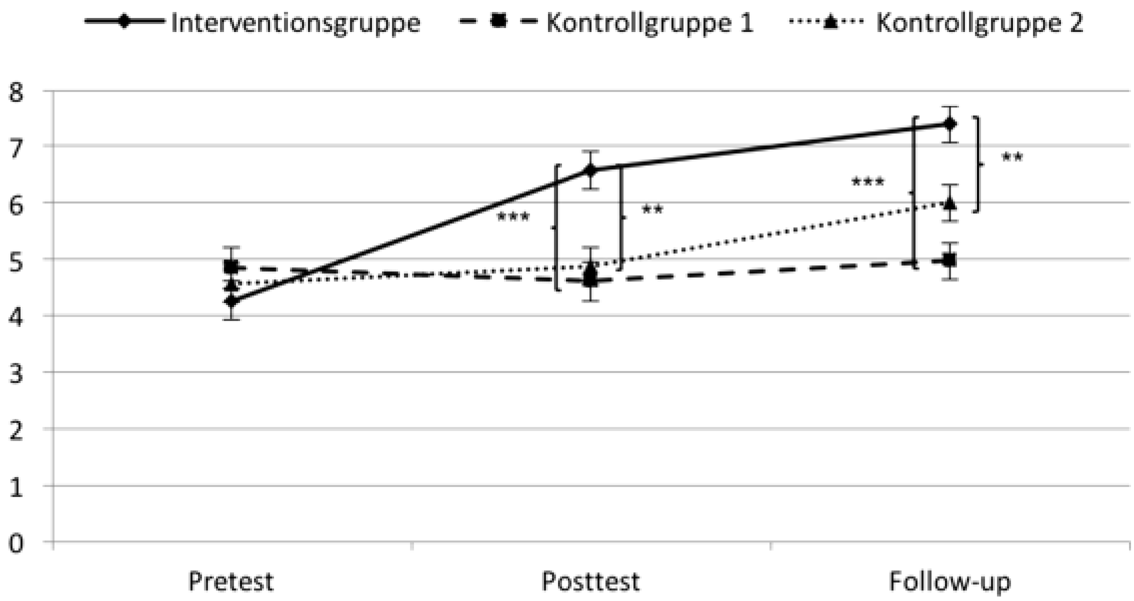
Tab. 2 Mittelwerte und Standardabweichungen bezüglich der mathematischen Strukturdarstellung (N = 33 je Gruppe)

		Pretest	Posttest	Follow-up-Test
Strukturrelevante Objekte und Verknüpfungen	Interventionsgruppe	***M* 4,27** (*SD* 1,91)	***M* 6,58** (*SD* 1,09)	***M* 7,39** (*SD* 0,79)
	Kontrollgruppe 1	***M* 4,85** (*SD* 2,12)	***M* 4,61** (*SD* 2,28)	***M* 4,97** (*SD* 2,37)
	Kontrollgruppe 2	***M* 4,58** (*SD* 2,02)	***M* 4,88** (*SD* 2,19)	***M* 6,00** (*SD* 1,90)
Verknüpfungen	Interventionsgruppe	***M* 2,58** (*SD* 1,58)	***M* 5,03** (*SD* 1,53)	***M* 6,55** (*SD* 1,06)
	Kontrollgruppe 1	***M* 2,39** (*SD* 1,52)	***M* 3,36** (*SD* 1,71)	***M* 3,33** (*SD* 1,96)
	Kontrollgruppe 2	***M* 2,61** (*SD* 2,03)	***M* 3,21** (*SD* 2,06)	***M* 5,00** (*SD* 2,11)

6.1.1 Beachtung strukturrelevanter Objekte und Verknüpfungen

Die Berechnung zeigt jeweils signifikante Haupteffekte der Faktoren Testzeitpunkt ($p < 0,001$) und Gruppe ($p = 0,003$) auf die durchschnittliche Darstellung der mathematischen Struktur. Zudem zeigt sich ein signifikanter Interaktionseffekt ($p < 0,001$) zwischen den beiden Faktoren (vgl. Tab. 1). Die Effektstärke der Interaktion ($f = 0,49$) ist nach Cohen (1992) als stark einzustufen. Die paarweisen Vergleiche zwischen den Gruppen zu den unterschiedlichen Testzeitpunkten unter Bonferroni-Korrektur ergeben keine signifikanten Unterschiede ($ps > 0,05$) zum Pretest-Zeitpunkt. Zum Zeitpunkt des Posttests zeigen sich signifikante Unterschiede zwischen Interventionsgruppe und Kontrollgruppe 1 ($p < 0,001$) sowie zwischen Interventionsgruppe und Kontrollgruppe 2 ($p = 0,002$). Auch im Follow-up-Test sind signifikante Unterschiede zwischen Interventionsgruppe und Kontrollgruppe 1 ($p < 0,001$) sowie zwischen Interventionsgruppe und Kontrollgruppe 2 ($p = 0,007$) festzustellen. Die übrigen Paarvergleiche zeigen keine signifikanten Unterschiede ($ps > 0,05$) (vgl. Abb. 4).

Abb. 4 Interaktion der Gruppen bezüglich der strukturrelevanten Objekte und Verknüpfungen (N = 33 je Gruppe; **p < 0,01, ***p < 0,001)

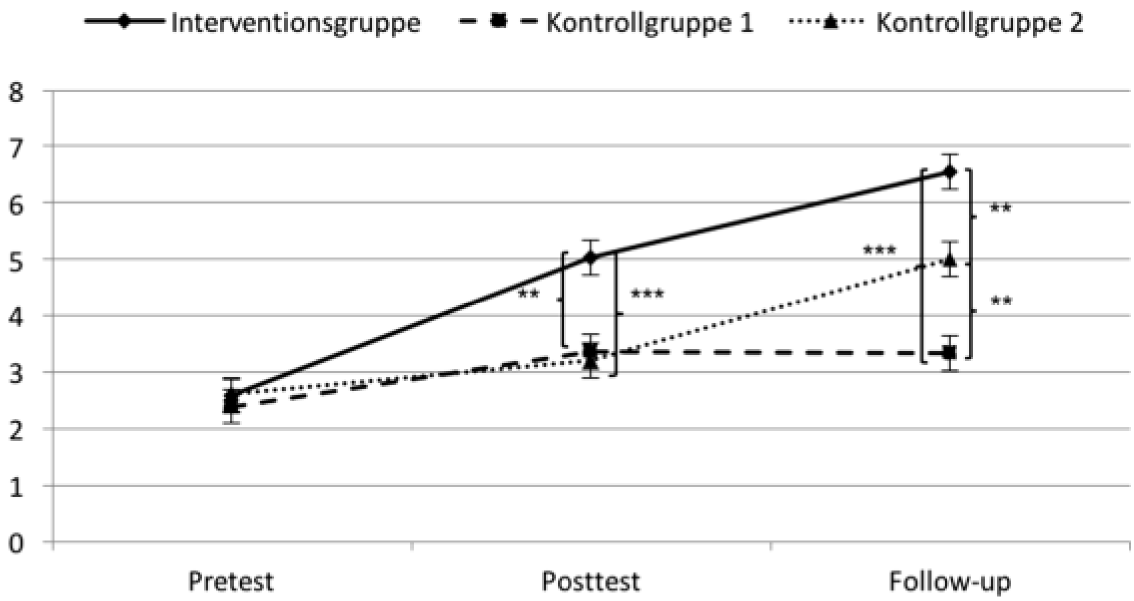


Hypothese H1a kann angenommen werden. Kinder der Interventionsgruppe beachten nach der Intervention häufiger mathematische Strukturelemente grafischer Darstellungen (strukturrelevante Objekte und Verknüpfungen) in ihren Dokumenten als Kinder der Kontrollgruppen.

6.1.2 Beachtung von Verknüpfungen

Die Berechnung der Varianzanalyse zeigt auch hier jeweils signifikante Haupteffekte der Faktoren Testzeitpunkt ($p < 0{,}001$) und Gruppe ($p < 0{,}001$) auf die durchschnittliche Darstellung mathematischer Verknüpfungen. Zudem zeigt sich ein signifikanter Interaktionseffekt ($p < 0{,}001$) zwischen den beiden Faktoren (vgl. Tab. 1). Die Effektstärke der Interaktion ($f = 0{,}56$) ist nach Cohen (1992) als stark einzustufen. Zum Pretest-Zeitpunkt ergeben die paarweisen Vergleiche unter Bonferroni-Korrektur keine signifikanten Unterschiede ($ps > 0{,}05$). Zum Zeitpunkt des Posttests zeigen sich signifikante Unterschiede zwischen Interventionsgruppe und Kontrollgruppe 1 ($p = 0{,}001$) sowie zwischen Interventionsgruppe und Kontrollgruppe 2 ($p < 0{,}001$). Auch im Follow-up-Test sind signifikante Unterschiede zwischen Interventionsgruppe und Kontrollgruppe 1 ($p < 0{,}001$) sowie Interventionsgruppe und Kontrollgruppe 2 ($p = 0{,}002$) festzustellen. Hier zeigt sich ebenfalls ein signifikanter Unterschied zwischen Kontrollgruppe 2 und Kontrollgruppe 1 ($p = 0{,}001$). Die übrigen Paarvergleiche zeigen keine signifikanten Unterschiede ($ps > 0{,}05$) (vgl. Abb. 5).

Abb. 5 Interaktion der Gruppen bezüglich der Verknüpfungen (N = 33 je Gruppe; **p < 0,01, ***p < 0,001)



Hypothese H1a kann auch für die Einschränkung auf Verknüpfungen angenommen werden. Kinder der Interventionsgruppe stellen nach der Intervention in ihren Dokumenten häufiger Verknüpfungen grafisch dar als Kinder der Kontrollgruppen.

6.2 Vergleich der mathematischen Passung

Die mathematische Passung wird jeweils hinsichtlich Maßzahl, Maßeinheit und Verknüpfung gesondert getestet. Tab. 3 zeigt die Entwicklung der Mittelwerte der Gruppen im Vergleich. Der Mauchly-Test weist jeweils nach, dass die Sphärizität erfüllt ist.

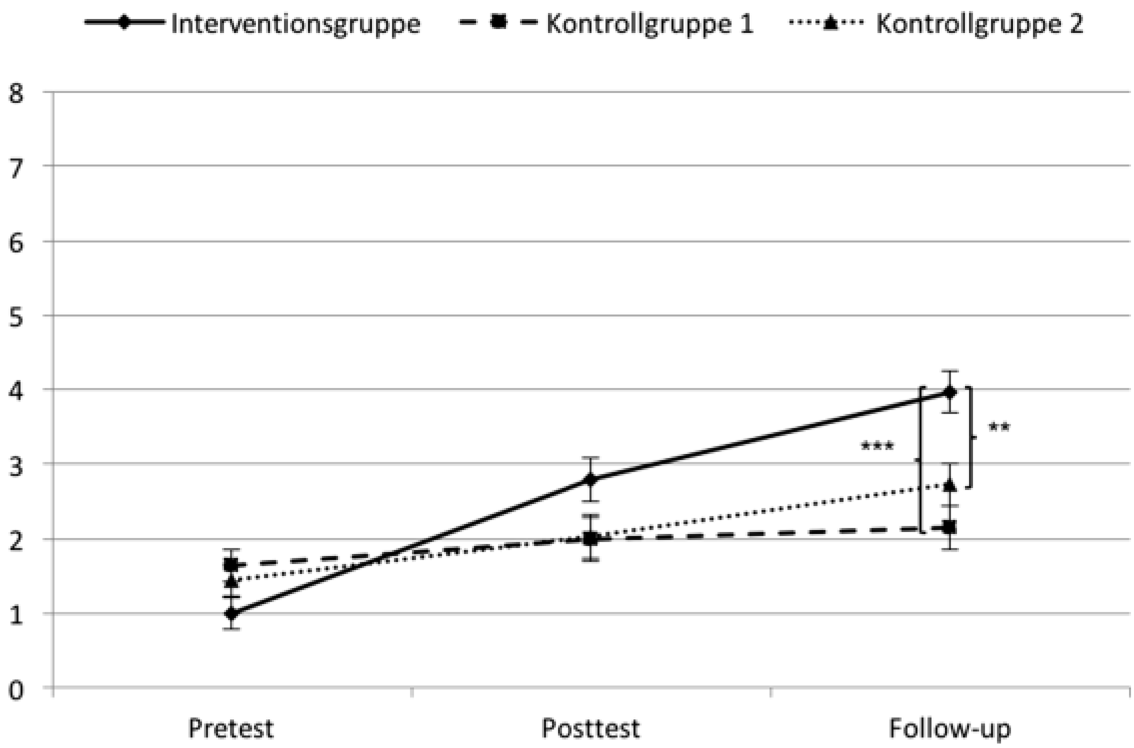
Tab. 3 Mittelwerte und Standardabweichungen bezüglich der mathematischen Passung (N = 33 je Gruppe)

		Pretest	Posttest	Follow-up-Test
Maßzahlen	Interventionsgruppe	***M* 1,00** (*SD* 0,79)	***M* 2,79** (*SD* 1,64)	***M* 3,97** (*SD* 1,38)
	Kontrollgruppe 1	***M* 1,64** (*SD* 1,48)	***M* 2,00** (*SD* 1,82)	***M* 2,15** (*SD* 1,86)
	Kontrollgruppe 2	***M* 1,45** (*SD* 1,25)	***M* 2,03** (*SD* 1,61)	***M* 2,73** (*SD* 1,68)
Maßeinheiten	Interventionsgruppe	***M* 1,18** (*SD* 1,21)	***M* 4,00** (*SD* 2,11)	***M* 6,03** (*SD* 1,51)
	Kontrollgruppe 1	***M* 2,42** (*SD* 2,05)	***M* 2,73** (*SD* 2,28)	***M* 2,82** (*SD* 2,44)
	Kontrollgruppe 2	***M* 1,82** (*SD* 1,38)	***M* 2,88** (*SD* 1,95)	***M* 3,67** (*SD* 2,16)
Verknüpfungen	Interventionsgruppe	***M* 1,52** (*SD* 1,35)	***M* 3,79** (*SD* 1,19)	***M* 4,91** (*SD* 1,63)
	Kontrollgruppe 1	***M* 1,67** (*SD* 1,45)	***M* 2,12** (*SD* 1,22)	***M* 2,39** (*SD* 1,50)
	Kontrollgruppe 2	***M* 1,58** (*SD* 1,44)	***M* 2,12** (*SD* 1,75)	***M* 3,39** (*SD* 1,89)

6.2.1 Beachtung der Maßzahlen

Die Varianzanalyse zeigt einen signifikanten Haupteffekt des Faktors Testzeitpunkt ($p < 0{,}001$) auf die durchschnittliche vollständige mathematische Passung hinsichtlich der Maßzahl. Der zweite Faktor, die Gruppe, hat darauf keinen Einfluss ($p = 0{,}093$; n. s.). Die Faktoren Testzeitpunkt und Gruppe interagieren signifikant miteinander ($p < 0{,}001$) (vgl. Tab. 1). Die Effektstärke der Interaktion ($f = 0{,}51$) ist nach Cohen (1992) als stark einzustufen. Die paarweisen Vergleiche unter Bonferroni-Korrektur ergeben keine signifikanten Unterschiede ($ps > 0{,}05$) zum Pretest- und Posttest-Zeitpunkt. Im Follow-up-Test zeigt sich ein signifikanter Unterschied zwischen Interventionsgruppe und Kontrollgruppe 1 ($p < 0{,}001$) sowie zwischen Interventionsgruppe und Kontrollgruppe 2 ($p = 0{,}009$). Zwischen den beiden Kontrollgruppen zeigt sich kein signifikanter Unterschied ($p > 0{,}05$) (vgl. Abb. 6).

Abb. 6 Interaktion der Gruppen bezüglich der passenden Maßzahlen ($N = 33$ je Gruppe; $^{**}p < 0{,}01$, $^{***}p < 0{,}001$)



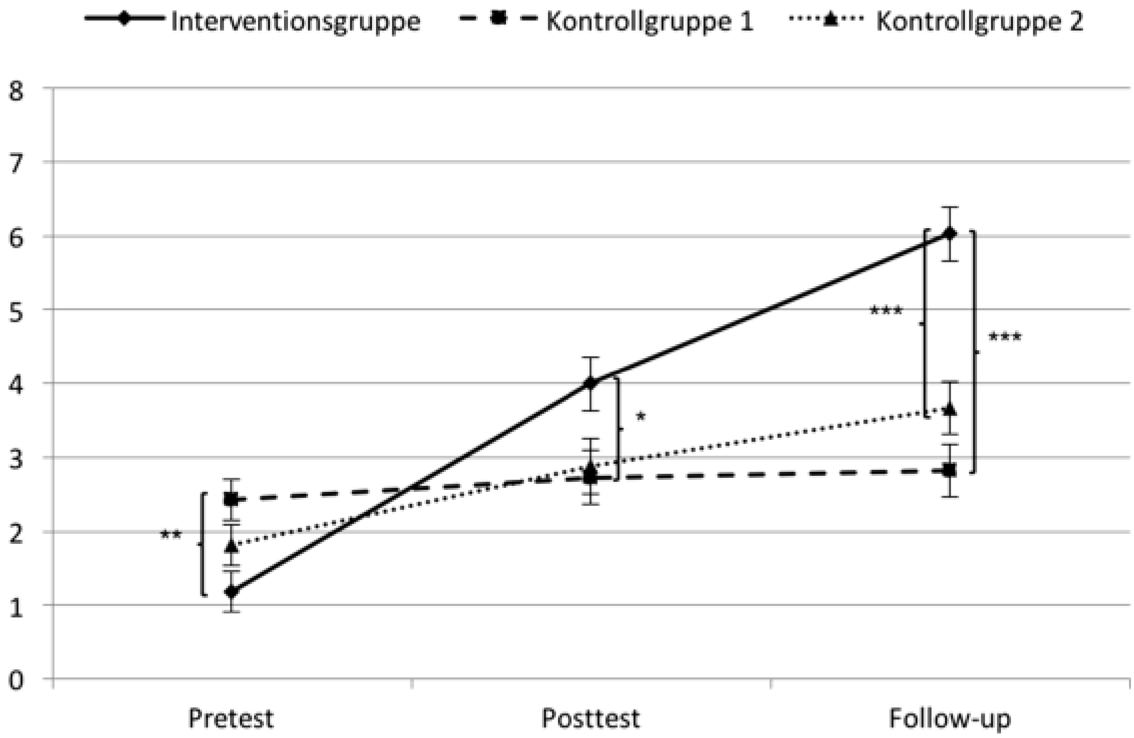
Hypothese H1b kann für den Follow-up-Testzeitpunkt angenommen werden. Kinder der Interventionsgruppe beachten drei Monate nach der Intervention häufiger die mathematische Passung der Maßzahlen in ihren Dokumenten als Kinder der Kontrollgruppen.

6.2.2 Beachtung der Maßeinheiten

Die Berechnung zeigt jeweils signifikante Haupteffekte der Faktoren Testzeitpunkt ($p < 0{,}001$) und Gruppe ($p = 0{,}015$) auf die durchschnittliche vollständige mathematische Passung hinsichtlich der

Maßeinheit. Es zeigt sich zudem ein signifikanter Interaktionseffekt ($p < 0{,}001$) (vgl. Tab. 1). Die Effektstärke der Interaktion ($f = 0{,}71$) ist nach Cohen (1992) als stark einzustufen. Die paarweisen Vergleiche unter Bonferroni-Korrektur ergeben zum Pretest-Zeitpunkt einen signifikanten Unterschied zwischen Interventionsgruppe und Kontrollgruppe 1 ($p = 0{,}006$). Dabei weisen die Kinderdokumente der Interventionsgruppe die geringsten Werte der Passung der Maßeinheiten auf. Auch zum Posttest-Zeitpunkt zeigt sich ein signifikanter Unterschied zwischen Interventionsgruppe und Kontrollgruppe 1 ($p = 0{,}049$). Dabei dreht sich der zum Pretest beobachtete Nachteil der Interventionsgruppe zu einem Vorteil für diese Gruppe von Kindern um. Zum Follow-up-Test ergeben sich signifikante Unterschiede zwischen Interventionsgruppe und Kontrollgruppe 1 ($p < 0{,}001$) sowie zwischen Interventionsgruppe und Kontrollgruppe 2 ($p < 0{,}001$). Die übrigen Paarvergleiche zeigen keine signifikanten Unterschiede ($ps > 0{,}05$) (vgl. Abb. 7).

Abb. 7 Interaktion der Gruppen bezüglich der passenden Maßeinheiten ($N = 33$ je Gruppe; *$p < 0{,}05$, **$p < 0{,}01$, ***$p < 0{,}001$)

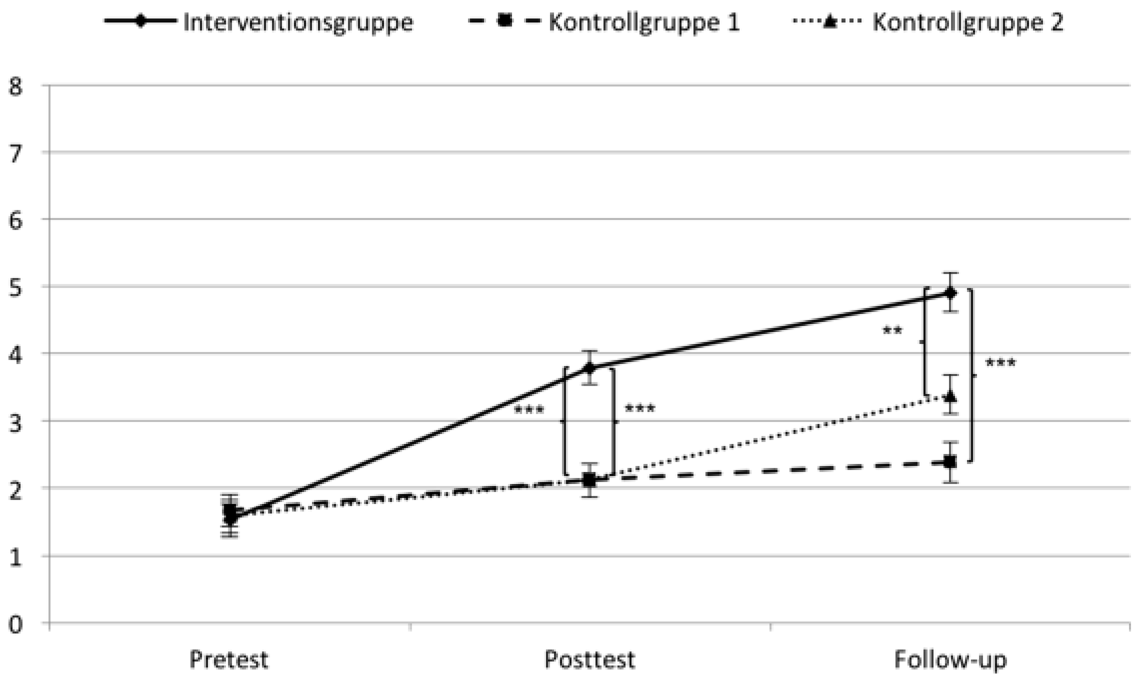


Hypothese H1b kann für den Follow-up-Testzeitpunkt angenommen werden. Kinder der Interventionsgruppe beachten drei Monate nach der Intervention häufiger die mathematische Passung der Maßeinheiten in ihren Dokumenten als Kinder der Kontrollgruppen.

6.2.3 Beachtung der Verknüpfungen

Die Berechnung zeigt jeweils signifikante Haupteffekte der Faktoren Testzeitpunkt ($p < 0{,}001$) und Gruppe ($p < 0{,}001$) auf die durchschnittliche vollständige mathematische Passung hinsichtlich der Verknüpfung. Weiterhin zeigt sich ein signifikanter Interaktionseffekt zwischen den beiden Faktoren ($p < 0{,}001$) (vgl. Tab. 1). Die Effektstärke der Interaktion ($f = 0{,}55$) ist nach Cohen (1992) als stark einzustufen. Die paarweisen Vergleiche unter Bonferroni-Korrektur ergeben signifikante Unterschiede zum Posttest-Zeitpunkt zwischen der Interventionsgruppe und beiden Kontrollgruppen (ps < 0,001). Zum Follow-up-Testzeitpunkt zeigen sich ebenfalls signifikante Unterschiede zwischen Interventionsgruppe und Kontrollgruppe 1 (p < 0,001) sowie zwischen Interventionsgruppe und Kontrollgruppe 2 (p = 0,001). Die übrigen Paarvergleiche zeigen keine signifikanten Unterschiede (ps > 0,05) (vgl. Abb. 8).

Abb. 8 Interaktion der Gruppen bezüglich der passenden Verknüpfungen (N = 33 je Gruppe; **p < 0,01, ***p < 0,001)



Hypothese H1b kann angenommen werden. Kinder der Interventionsgruppe stellen nach der Intervention häufiger die mathematisch passenden Verknüpfungen in ihren Dokumenten grafisch dar als Kinder der Kontrollgruppen.

6.3 Vergleich des Abstraktionsgrades

Die zwei Indikatoren des Abstraktionsgrades werden einzeln getestet. Tab. 4 zeigt die Entwicklung der Mittelwerte der Gruppen im Vergleich. Da der Mauchly-Test nachweist, dass die Sphärizität verletzt ist, wird die Greenhouse-Geisser-Korrektur vorgenommen.

Tab. 4 Mittelwerte und Standardabweichungen bezüglich des Abstraktionsgrads (N = 33 je Gruppe)

		Pretest	Posttest	Follow-up-Test
Indikator 1	Interventionsgruppe	***M* 2,85** (*SD* 1,66)	***M* 4,39** (*SD* 1,30)	***M* 4,88** (*SD* 1,08)
	Kontrollgruppe 1	***M* 3,03** (*SD* 1,74)	***M* 3,39** (*SD* 1,98)	***M* 3,82** (*SD* 1,98)
	Kontrollgruppe 2	***M* 3,21** (*SD* 1,64)	***M* 3,58** (*SD* 1,82)	***M* 4,58** (*SD* 1,86)
Indikator 2	Interventionsgruppe	***M* 2,00** (*SD* 1,54)	***M* 2,73** (*SD* 1,46)	***M* 2,94** (*SD* 1,17)
	Kontrollgruppe 1	***M* 1,91** (*SD* 1,42)	***M* 2,30** (*SD* 1,49)	***M* 2,64** (*SD* 1,56)
	Kontrollgruppe 2	***M* 1,88** (*SD* 1,58)	***M* 2,67** (*SD* 1,95)	***M* 2,70** (*SD* 1,94)

Tab. 5 Mittelwerte und Standardabweichungen bezüglich der Lösungsrichtigkeit (N = 33 je Gruppe)

		Pretest	Posttest	Follow-up-Test
Lösungsrichtigkeit	Interventionsgruppe	***M* 2,27** (*SD* 1,68)	***M* 3,42** (*SD* 1,90)	***M* 4,27** (*SD* 1,98)
	Kontrollgruppe 1	***M* 2,00** (*SD* 1,92)	***M* 2,91** (*SD* 2,11)	***M* 3,03** (*SD* 2,37)
	Kontrollgruppe 2	***M* 2,00** (*SD* 1,56)	***M* 2,97** (*SD* 1,94)	***M* 3,61** (*SD* 1,69)

6.3.1 Fokussierung auf strukturrelevante Objekte (Indikator 1)

Es zeigt sich ein signifikanter Haupteffekt des Faktors Testzeitpunkt auf die durchschnittliche Fokussierung auf strukturrelevante Objekte ($p < 0{,}001$). Der Faktor Gruppe hat darauf keinen Einfluss ($p = 0{,}157$; n. s.). Die Faktoren Testzeitpunkt und Gruppe interagieren miteinander ($p = 0{,}023$) (vgl. Tab. 1). Die Effektstärke der Interaktion ($f = 0{,}25$) ist nach Cohen (1992) als mittel einzustufen. Die paarweisen Vergleiche unter Bonferroni-Korrektur ergeben keine signifikanten Unterschiede ($ps > 0{,}05$) zum Pretest- und Posttest-Zeitpunkt. Im Follow-up-Test zeigt sich ein signifikanter Unterschied zwischen Interventionsgruppe und Kontrollgruppe 1 ($p = 0{,}036$). Die übrigen Paarvergleiche zum Follow-up-Zeitpunkt zeigen keine signifikanten Unterschiede ($ps > 0{,}05$).

Hypothese H1c muss verworfen werden. Kinder der Interventionsgruppe fokussieren sich nach der Intervention in ihren grafischen Darstellungen zu Textaufgaben nicht häufiger auf die strukturrelevanten Objekte als Kinder der Kontrollgruppen.

6.3.2 Fokussierung auf wesentliche mathematische Eigenschaften (Indikator 2)

Die Varianzanalyse zeigt einen signifikanten Haupteffekt des Faktors Testzeitpunkt auf die durchschnittliche Fokussierung auf wesentliche mathematische Eigenschaften der strukturrelevanten Objekte ($p < 0{,}001$). Der Faktor Gruppe hat keinen Einfluss ($p = 0{,}677$; n. s.). Die Faktoren Testzeitpunkt und Gruppe interagieren nicht miteinander ($p = 0{,}872$; n. s.).

Hypothese H1c muss verworfen werden. Kinder der Interventionsgruppe fokussieren sich nach der Intervention in ihren grafischen Darstellungen zu Textaufgaben nicht häufiger auf die wesentlichen Eigenschaften der strukturrelevanten Objekte als Kinder der Kontrollgruppen.

6.4 Vergleich der Lösungsraten

Tab. 5 zeigt die Entwicklung der Mittelwerte der Gruppen hinsichtlich der Lösungsrichtigkeit im Vergleich. Der Mauchly-Test auf Sphärizität weist nach, dass diese erfüllt ist. Die Berechnung zeigt einen signifikanten Haupteffekt des Faktors Testzeitpunkt auf die durchschnittliche Lösungsrichtigkeit ($p < 0{,}001$). Der Faktor Gruppe hat darauf keinen Einfluss ($p = 0{,}237$; n. s.). Die Faktoren Testzeitpunkt und Gruppe interagieren nicht miteinander ($p = 0{,}213$; n. s.).

Hypothese H2 muss verworfen werden. Kinder der Interventionsgruppe lösen nach der Intervention Textaufgaben nicht häufiger richtig als Kinder der Kontrollgruppen.

7 Diskussion

Die Ergebnisse zeigen ein differenziertes Bild hinsichtlich der Entwicklung grafischer Darstellungsfähigkeiten und der Lösungsrichtigkeit. Viele Faktoren, die einen Einfluss auf die Entwicklung der Darstellungsfähigkeiten bzw. die Lösungsraten nehmen, werden in der Untersuchung nicht kontrolliert. Unterrichtliche Faktoren der Kontrollgruppen sind durch Selbstauskünfte der Lehrkräfte erfasst. Da die Interventionsgruppe während des Untersuchungszeitraums keine andere Förderung im Sachrechnen oder im grafischen Darstellen als die Intervention selbst erfahren hat, lassen die Ergebnisse den Schluss zu, dass die erhobenen Befunde auf die Intervention zurückzuführen sein können. Im Folgenden werden die Befunde interpretiert und diskutiert.

7.1 Mathematische Struktur

Die Kinder der Interventionsgruppe beachten in ihren grafischen Darstellungen über die drei Testzeitpunkte hinweg zunehmend häufiger Aspekte der mathematischen Struktur, d. h. sie fertigen zunehmend objektbezogene und diagrammatische grafische Darstellungen an (vgl. Abschn. 4.2.1). Im Gegensatz zum Pretest ist nach der Intervention in den meisten Aufgabenbearbeitungen eine mathematische Struktur grafisch dargestellt. Da die Entwicklung nach der Intervention nicht abbricht, sondern sich etwas schwächer fortsetzt, kann sie als nachhaltig angesehen werden. Hinsichtlich der Beachtung der mathematischen Struktur unterscheiden sich die grafischen Darstellungen der Kinder der Interventionsgruppe nach der Intervention jeweils statistisch bedeutsam von den grafischen Darstellungen der Kontrollgruppen. Die Entwicklung in der Interventionsgruppe kann deshalb auf die Intervention zurückgeführt werden. Allein die Beschäftigung mit den Aufgaben kann aufgrund des signifikanten Unterschieds zwischen der Interventionsgruppe und Kontrollgruppe 1 nicht als ausschlaggebend für die Verbesserung angesehen werden. Die Höhe des Interaktionseffekts zeigt, dass die Unterschiede zwischen der Interventionsgruppe und den Kontrollgruppen auch praktisch bedeutsam sind.

Die Ergebnisse, in denen speziell die Beachtung von Verknüpfungen fokussiert wird, zeigen in allen Untersuchungsgruppen im Pretest niedrige Mittelwerte. Dieser Befund bestätigt die Aussage von Hasemann (2006), dass gerade die grafische Darstellung mathematischer Beziehungen den

Schülerinnen und Schülern Schwierigkeiten bereitet. Dies kann zudem den Befund verschiedener Studien (z. B. Fagnant und Vlassis 2013; Lopez Real und Veloo 1993; van Essen und Hamaker 1990; Bender 1980a, 1980b) erklären, dass die Lernenden grafische Darstellungen kaum als Bearbeitungshilfen für sich nutzen können.

Insgesamt zeigen die Ergebnisse zur grafischen Darstellung von Verknüpfungen, ähnlich wie bei der Darstellung mathematischer Strukturaspekte im Allgemeinen, eine zunehmende Beachtung der mathematischen Beziehungen über die drei Testzeitpunkte hinweg in den Aufgabenbearbeitungen der Interventionsgruppe. Die Kinder fertigen nach der Intervention überwiegend diagrammatische grafische Darstellungen an, d. h. sie ordnen die Zeichen für strukturrelevante Objekte entsprechend an. Auch hier erweist sich die Entwicklung als nachhaltig. Da sich die grafischen Darstellungen der Interventionsgruppe nach der Intervention ebenfalls statistisch bedeutsam von denen der Kontrollgruppen unterscheiden, kann der Effekt auf die Intervention zurückgeführt werden. Der signifikante Unterschied zu Kontrollgruppe 1 zeigt auch hier, dass allein die Beschäftigung mit den Aufgaben nicht wesentlich für die Verbesserung ist. Der Interaktionseffekt fällt etwas höher aus als bei der allgemeinen Beachtung mathematischer Strukturaspekte. Die Unterschiede zwischen der Interventionsgruppe und den Kontrollgruppen sind auch hier praktisch bedeutsam.

Die Kinder der Interventionsgruppe haben ihre Darstellungsfähigkeiten hinsichtlich der grafischen Darstellung mathematischer Strukturen durch Zeichen für strukturrelevante Objekte und deren Anordnung somit weiterentwickelt. Der leichte Rückgang der Streuung über die Testzeitpunkte zeigt eine homogenere Aufgabenbearbeitung in der Interventionsgruppe hinsichtlich der mathematischen Strukturdarstellung. Das ist vor dem Hintergrund erklärbar, dass in den Interventionseinheiten eine Auseinandersetzung mit den für eine grafische Darstellung der mathematischen Struktur wesentlichen Aspekten angeregt wurde. Die homogenere Aufgabenbearbeitung sagt jedoch nichts darüber aus, wie die Kinder die mathematischen Aspekte grafisch dargestellt haben. Die Darstellungen können sich hinsichtlich der gewählten Zeichen und der Anordnung sowie der anderen Merkmale grafischer Darstellungen deutlich unterscheiden (vgl. Abschn. 4.2.1). Inwieweit die grafisch dargestellte mathematische Struktur mit der in der Aufgabe gegebenen übereinstimmt, ist eine Frage der mathematischen Passung (vgl. Abschn. 7.2).

Die Kinder der 3. Jahrgangsstufe sind nach der Intervention deutlich besser in der Lage, auf direkte Aufforderung hin Elemente der mathematischen Struktur grafisch abzubilden und haben somit ihre Darstellungsfähigkeiten in dieser Hinsicht verbessert. Dieses Ergebnis ergänzt Befunde von van Dijk et al. (2003) zu positiven Auswirkungen eines Unterrichts zum Erstellen grafischer Darstellungen in Ko-Konstruktion (vgl. Abschn. 2.1.2): Durch die Intervention mit individuellen Konstruktions- und gemeinsamen Reflexionsphasen, die die Vielfalt der grafischen Darstellungen der Kinder berücksichtigt, kann die Darstellung mathematischer Strukturen gefördert werden. Das betrifft nicht nur die mathematischen Aspekte allgemein (mathematische Objekte und Verknüpfungen), sondern vor allem auch die für die Mathematik wesentliche Darstellung mathematischer Beziehungen (vgl. Dörfler 2006). Im Gegensatz zu den im Forschungsüberblick (vgl. Abschn. 2.1.2) vorgestellten Studien kann jedoch keine Aussage darüber getroffen werden, inwieweit die Schülerinnen und Schüler die grafischen Darstellungen ohne Aufforderung für sich als Lösungshilfe anfertigen würden. Hierfür wären weitere Untersuchungen nötig. Die Darstellung mathematischer Beziehungen kann jedoch als eine Voraussetzung für eine Nutzung als Lösungshilfe angesehen werden.

7.2 Mathematische Passung

Die Befunde zur mathematischen Passung hinsichtlich der Verknüpfungen zeigen, dass die Kinder der Interventionsgruppe nach der Intervention nicht nur signifikant häufiger mathematische Verknüpfungen abbilden als die Kinder der Kontrollgruppen (vgl. Abschn. 7.1), sondern auch signifikant häufiger die zur Textaufgabe mathematisch passenden Verknüpfungen grafisch darstellen. Diese Entwicklung kann aufgrund der Ergebnisse der Follow-up-Tests als nachhaltig angesehen werden. Die Höhe des Interaktionseffekts ist auch hier praktisch bedeutsam. Die Mittelwerte der Interventionsgruppe liegen jeweils leicht unter den Mittelwerten der Abbildung von Verknüpfungen allgemein (vgl. Abschn. 7.1). Zu allen Testzeitpunkten sind somit in den Aufgabenbearbeitungen der Interventionsgruppe diagrammatische grafische Darstellungen enthalten, die andere Verknüpfungen als die in der Aufgabe gegebenen abbilden. In der Mehrzahl passen die Anordnungen der strukturrelevanten Objekte in den diagrammatischen grafischen Darstellungen jedoch zu den im Aufgabentext gegebenen Verknüpfungen. Die Kinder der Interventionsgruppe haben im Interventionszeitraum ihre Darstellungsfähigkeiten hinsichtlich der mathematischen Passung der grafischen Darstellung von Verknüpfungen somit weiterentwickelt. Allein die Beschäftigung mit den Aufgaben kann auch hier nicht als ausschlaggebend angesehen werden.

Diese Befunde ergänzen die bereits in Abschnitt 7.1 diskutierten Ergebnisse: Die Kinder entwickeln zunehmend grafische Darstellungen zu den Aufgaben, in denen die mathematisch passende Verknüpfung abgebildet ist.

Auch die im Aufgabentext gegebenen Maßzahlen und Maßeinheiten bilden die Kinder der Interventionsgruppe zunehmend passend grafisch ab und unterscheiden sich darin statistisch bedeutsam von den Kindern der Kontrollgruppen. Die Höhe des Interaktionseffekts ist auch hier jeweils praktisch bedeutsam ist. Er ergibt sich hinsichtlich der Maßzahlen aus hoch- bzw. höchstsignifikanten Unterschieden jeweils zwischen der Interventionsgruppe und den Kontrollgruppen im Follow-up- Test, jedoch noch nicht im Posttest. Auch hinsichtlich der Maßeinheiten bestehen höchstsignifikante Unterschiede jeweils zwischen der Interventionsgruppe und den Kontrollgruppen im Follow-up-Test. Im Posttest ist der Unterschied lediglich zwischen der Interventionsgruppe und Kontrollgruppe 1 signifikant. Auch im Pretest besteht zwischen der Interventionsgruppe und Kontrollgruppe 1 ein signifikanter Unterschied, allerdings mit umgekehrtem Vorzeichen: Hier liegt der Mittelwert der Interventionsgruppe signifikant unter dem Mittelwert von Kontrollgruppe 1. Die Intervention zeigt somit hinsichtlich der Beachtung passender Maßzahlen und Maßeinheiten in den grafischen Darstellungen keine unmittelbar messbaren Unterschiede. Diese zeigen sich erst verzögert. Die Mittelwerte der Interventionsgruppe sind im Pretest niedriger als die Werte der Kontrollgruppen, im Posttest höher. Hierin kann ein Grund gesehen werden, dass die Veränderung mittels der Varianzanalyse statistisch nicht bedeutsam wird. Die Selbstauskünfte der Lehrkräfte lassen keine anderen Veränderungen im Unterricht nach dem Posttest und keine weitere Förderung im grafischen Darstellen im Sachrechnen erkennen, als den Verzicht auf die Intervention. Das legt die Vermutung nahe, dass die statistisch bedeutsamen Unterschiede zwischen der Interventionsgruppe und den beiden Kontrollgruppen als Langzeitwirkung der Intervention interpretiert werden können.

Diese Ergebnisse korrespondieren mit den Ergebnissen von van Essen und Hamaker (1990), die berichten, dass die grafischen Darstellungen der Kinder bereits aufgrund einer zeitlich kurz angelegten Intervention reichhaltiger werden. In der vorliegenden Studie zeigt sich die Reichhaltigkeit in einer vermehrten Darstellung der Maßzahlen und Maßeinheiten. Diese festgestellte Entwicklung zeigt über die Ergebnisse der Studie von van Essen und Hamaker (1990) hinaus, dass die grafischen Darstellungen der Kinder der Interventionsgruppe nicht nur akkurater und vollständiger werden (vgl. Abschn. 2.1.2), beispielweise durch die Beachtung der Maßeinheiten und Maßzahlen. Vielmehr gewinnen die grafischen Darstellungen der Drittklässlerinnen und -klässler mathematisch eine neue Qualität, indem die zur Aufgabe passenden Verknüpfungen abgebildet werden. Damit tragen sie den Charakter von zur Aufgabe passenden grafischen Diagrammen (vgl. Abschn. 2.1.3).

7.3 Abstraktionsgrad

Hinsichtlich des Abstraktionsgrades entsprechen die Befunde nicht den Erwartungen. Die Kinder der Interventionsgruppe beachten in ihren grafischen Darstellungen keinen höheren Abstraktionsgrad als Kinder der Kontrollgruppen. Wie in Abschn. 2.1.2 dargelegt, entspricht ein niedriger Abstraktionsgrad zunächst einer für Kinder typischen Art zu zeichnen (vgl. Rasch 2001). Allerdings steht das Ergeb nis im Gegensatz zu anderen Studien (vgl. Van Dijk et al. 2003; Veloo und Lopez Real 1994), in denen die Darstellungen der Kinder zunehmend formalisierter und schematischer werden (vgl. Abschn. 2.1.2), was zumindest einem teilweise höheren Abstraktionsgrad in der vorliegenden Studie ähnlich ist. Das Ergebnis muss jedoch vor dem Hintergrund der Aufgabenstellung interpretiert werden: Die Kinder wurden in der Untersuchung aufgefordert, alles aufzuzeichnen, was ihnen für die Lösung der Aufgaben wichtig ist, und zwar so, dass es jemand anderes verstehen kann. Werden grafische Darstellungen für eine potentielle Öffentlichkeit angefertigt, sind sie meist reichhaltiger (vgl. Cox 1999). In der vorliegenden Untersuchung zeigt sich das in zusätzlichen ausschmückenden Elementen, die für die mathematische Struktur nicht wesentlich sind. Den Kindern scheint ein in der grafischen Darstellung erkennbarer Realitätsbezug für eine gut verständliche Darstellung aufgrund der Intervention nicht unwesentlicher geworden zu sein. Das Ergebnis ergänzt Befunde von Pantziara et al. (2009), die festgestellt haben, dass Lernende abstrakte vorgegebene grafischen Darstellungen in konkrete Bilder umzuwandeln versuchten, um diese interpretieren zu können (vgl. Abschn. 2.1.2). Darüber, welchen Abstraktionsgrad die grafischen Darstellungen der Kinder aufweisen würden, wenn sie als Bearbeitungshilfen angefertigt würden, kann hier keine Aussage getroffen werden. Die deskriptive Betrachtung der verschiedenen Aufgabenitems legt die Vermutung nahe, dass für die Wahl des Abstraktionsgrades die Aufgabentypen entscheidend sind (Ott 2016, S. 244 ff).

Für das Problemlösen wird ein starker Realitätsbezug in bildlichen Darstellungen als hinderlich angesehen und schematische Darstellungen als hilfreich (vgl. Hegarty und Kozhenikov 1999; vgl. Abschn. 2.1.2). Bisher wurde in der Analyse jedoch nicht zwischen dem Realitätsbezug und der Darstellung mathematischer Strukturen in der Klassifizierung der Darstellungen unterschieden. Bereits Veloo und Lopez Real (1994) weisen darauf hin, dass weniger der Realitätsbezug als vielmehr die Darstellung mathematischer Beziehungen für das erfolgreiche Problemlösen ausschlaggebend sein könnte. Sieht man das Ergebnis der vorliegenden Studie hinsichtlich des Abstraktionsgrades im Zusammenhang zu den Ergebnissen der mathematischen Struktur und der mathematischen Passung, so zeigt sich, dass die Kinder zwar mehr auf die mathematische Struktur und Passung in ihren Darstellungen achten, die Erhöhung des Abstraktionsgrades jedoch nicht einhergeht. Vor dem Hintergrund des Konzepts des elementaren Modellierens von Schwarzkopf (2006), der betont, dass die Mathematisierung im Sachrechnen nicht in einer Vernachlässigung empirischer Details besteht, sondern darin, flexible Beziehungen zwischen der Sache und der Mathematik herzustellen, kann das Ergebnis dahingehend interpretiert werden, dass die Kinder für diese Beziehungen einerseits die Sachebene nicht vernachlässigen, dennoch zunehmend stärker flexiblere mathematische Beziehungen herstellen können. Die Untersuchungsergebnisse legen die Vermutung nah, dass die

Entwicklung des Abstraktionsgrades unabhängig von der Darstellung der mathematischen Struktur und der mathematischen Passung verläuft. Dies müsste in weiteren Untersuchungen geprüft werden.

7.4 Lösungsraten

Die Kinder der Interventionsgruppe verbessern sich deskriptiv betrachtet hinsichtlich der Lösungsraten. Sie lösen die Aufgaben jedoch nicht signifikant häufiger richtig als die Kinder der Kontrollgruppen. Das ist konträr zu Ergebnissen von van Dijk et al. (2003), in deren Studie sich ein Unterricht, in dem Kinder eigene Darstellungen entwickeln und mit ihren Klassenkameraden in Austausch darüber treten, positiv auswirkt. Im Gegensatz zu dieser Studie wurden die grafischen Darstellungen in der hier evaluierten Intervention als eine mögliche Darstellungsweise im Mathematikunterricht reflektiert, mit dem Ziel die Darstellungsfähigkeiten zu entwickeln. Sie wurden nicht als Lösungshilfe für die Aufgaben betrachtet. Darin könnte ein möglicher Grund für die unterschiedlichen Ergebnisse in den beiden Studien liegen. Zudem lag auch in der Testbearbeitung der Schwerpunkt nicht auf der Aufgabenlösung. Die Entwicklung der Interventionsgruppe bezüglich der Lösungsraten und der Erstellung mathematisch passender diagrammatischer Darstellungen verhält sich unterschiedlich. Das weist darauf hin, dass diese beiden Bereiche sich nicht gegenseitig bedingen. Beispielsweise heißt das, dass das Anfertigen einer mathematisch passenden diagrammatischen grafischen Darstellung nicht garantiert, dass die Aufgabe auch richtig gelöst wird. Das korrespondiert mit Ergebnissen von van Essen und Hamaker (1990). Es könnte darin begründet sein, dass die Kinder die grafische Darstellung und die Aufgabenlösung noch als unabhängig voneinander betrachten. In Anlehnung an Ergebnisse von van Essen und Hamaker (1990) könnte ein Grund auch im Alter der Kinder liegen (vgl. Abschn. 2.1.2). Weitere Forschungen in diesem Bereich sind notwendig.

Da in der Varianzanalyse nur der Unterschied hinsichtlich der Lösungsrichtigkeit getestet wird, ist ein Blick in die deskriptive Beschreibung der Ergebnisse hilfreich (Ott 2016, S. 253). Hier zeigt sich, dass in der Interventionsgruppe der durchgehende Anstieg richtiger Lösungen mit einem deutlichen Absinken des Anteils falscher Lösungen zwischen Pretest und Posttest und einem kontinuierlichen Absinken des Anteils der Kinderdokumente, in denen keine Lösung angegeben ist, einhergeht. In den beiden Kontrollgruppen zeigt sich dieses Bild nicht. Ob die deskriptiven Befunde statistisch bedeutsam sind, müssten weitere Untersuchungen klären. Der beschriebene Unterschied in der Entwicklung falscher Lösungen und Aufgaben ohne Lösungen zwischen den Gruppen könnte ein Hinweis darauf sein, dass die Entwicklung in der Interventionsgruppe nicht ausschließlich auf Gewöhnungseffekte an den Test bzw. das fortschreitende Alter der Kinder zurückzuführen ist.

7.5 Grenzen der Untersuchung

Die Aussagekraft der Studie wird durch verschiedene Faktoren begrenzt. Die Stichprobe der Studie ist nicht global repräsentativ, kann jedoch als merkmalsspezifisch repräsentativ bezüglich des grafischen Darstellens im Mathematikunterricht angesehen werden (Bortz und Döring 2006, S. 397 f). Für die Entwicklung von Darstellungsfähigkeiten ist der aus untersuchungspraktischen Gründen gesetzte Zeitrahmen in einer dritten Jahrgangsstufe mit neun Interventionseinheiten relativ kurz. Die Anlage als Mehrgruppendesign mit zwei Kontrollgruppen ermöglicht es, Effekte auf die Intervention zurückzuführen und mögliche Störvariablen wie die altersmäßige Entwicklung, die Gewöhnung an den Test, den Einfluss der Interventionsaufgaben an sich sowie die Klassenzusammensetzung und -führung zu kontrollieren. Dennoch kann in einer Studie unter nahezu realen Bedingungen der Einfluss von Störungen nie gänzlich vermieden werden. Der Entwicklungsverlauf von Kontrollgruppe 1, der im Gegensatz zu den anderen Gruppen schwächere oder teilweise keine Anstiege hinsichtlich der Beachtung der konstituierenden Merkmale grafischer Darstellungen bzw. der Lösungsraten aufweist, könnte auf einem derartigen Einfluss beruhen. In den Ergebnissen sind teilweise Deckeneffekte beobachtbar, was sich auch in einer Änderung der Streuung über die Zeit äußert. Dies ist inhaltlich darin begründet, dass der Test, in dem die Kinder zum Zeichnen aufgefordert werden, am oberen Ende nicht weiter differenziert. Mit zwölf Kindern der Interventionsgruppe wurden begleitende Interviews durchgeführt, in denen sie ihre eigene grafische Darstellung sowie zwei fremde grafische Darstellungen erklärten. Bereits die Vorgabe von grafischen Darstellungen in einem Test können sich positiv auf die Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler in einem nachfolgenden Test auswirken (vgl. Fagnant und Vlassis 2013). Da alle Kinder in den Reflexionsphasen verschiedene fremde grafische Darstellungen zu erklären und verstehen versuchen, wird der Einfluss der Interviews als gering eingeschätzt.

8 Fazit

Die Studie verfolgt die Fragen, inwieweit sich die vorgestellte Intervention auf die Beachtung der konstituierenden Merkmale für grafische Darstellungen zu Textaufgaben und auf die zugehörigen Lösungsraten positiv auswirkt. Die Intervention fokussiert dabei die Konstruktion eigener grafischer Darstellungen und die gemeinsame Reflexion anderer Darstellungen aus der Klasse. Die Ergebnisse legen nahe, dass die Lernenden durch dieses kommunikative Unterrichtssetting dazu angeregt werden, häufiger eine mathematisch zur Aufgabe passende Struktur in ihren grafischen Darstellungen zu beachten und abzubilden. Dies kann als eine Entwicklung von Bewusstheit (vgl. Mason 1987) für diese Merkmale grafischer Darstellungen interpretiert werden und ist eine wichtige Komponente mathematischer Kompetenz (vgl. Goldin und Shteingold 2001; Lesh et al. 1987). Die qualitativen Analysen (vgl. Ott 2016) zeigen, dass die Schülerinnen und Schüler dabei ihre individuelle Art der Darstellung meist beibehalten. Auch der Abstraktionsgrad bleibt in den grafischen Darstellungen über die Testzeitpunkte hinweg größtenteils konstant. Eine Veränderung in Richtung abstrakterer Darstellungen scheint für sie nicht notwendig bzw. unangebracht zu sein. Für den Unterricht erscheint es sinnvoll, sich weniger auf eine Verwendung abstrakter grafischer Darstellungen oder Bearbeitungshilfen (Franke und Ruwisch 2010, S. 103 ff; 2.1.2) zu fokussieren. Vielmehr legen die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung nahe, die grafische Darstellung der mathematischen Beziehungen in der Anordnung der Zeichen für strukturrelevante Objekte ins Zentrum des Unterrichts zu rücken. Zunächst unvollständige und fehlerhafte Versuche der Kinder sind Etappen auf dem Weg zur Entwicklung von Darstellungsfähigkeiten. Diese müssen von der Lehrkraft ausgehalten, kompetenzorientiert betrachtet (vgl. Selter 2007) und produktiv im Unterricht genutzt werden. Die Entwicklung von Darstellungsfähigkeiten ermöglicht den Lernenden letztlich, die Verantwortung für ihr grafisches Darstellen zu übernehmen. Dies ist nicht zuletzt der Sinn der Entwicklung allgemeiner mathematischer Kompetenzen.

Literatur

Bender, P. (1980a). Analyse der Ergebnisse eines Sachrechentests am Ende des 4. Schuljahres, Teil 1.

Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe, 8(4), 150–155.

Bender, P. (1980b). Analyse der Ergebnisse eines Sachrechentests am Ende des 4. Schuljahres: Teil 3.

Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe, 8(6), 226–233.

Bortz, J., & Döring, N. (2006). Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler (4. Aufl.). Heidelberg: Springer.

Bruner, J. S. (1966). Toward a theory of instruction. New York: W. W. Norton & Co.. Bruner, J. S. (1964). The course of cognitive growth. American Psychologist, 19(1), 1–15.

BY – Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus (2000). Lehrplan für die bayerische Grundschule. München: Oldenbourg.

Cohen, J. (1992). A power primer. Psychological Bulletin, 112(1), 155–159.

Cox, R. (1999). Representation construction, externalised cognition and individual differences. Learning and Instruction, 9(4), 343–363.

Diezmann, C. M. (2002). Enhancing students' problem solving through diagram use. Australian Primary Mathematics Classroom, 7(3), 4–8.

Dörfler, W. (2015). Abstrakte Objekte in der Mathematik. In G. Kadunz (Hrsg.), Semiotische Perspektiven auf das Lernen von Mathematik (S. 33–49). Heidelberg: Spektrum.

Dörfler, W. (2013). Was würden Peirce oder Wittgenstein zu Kompetenzmodellen sagen? In M. Rathgeb,

M. Helmerich, R. Krömer, K. Lengnink & G. Nickel (Hrsg.), Mathematik im Prozess (S. 73–87). Wiesbaden: Springer.

Dörfler, W. (2006). Diagramme und Mathematikunterricht. Journal für Mathematikdidaktik, 27(3–4), 200–219.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61(1), 103–131.

Eid, M., Gollwitzer, M., & Schmitt, M. (2011). Statistik und Forschungsmethoden (2. Aufl.). Weinheim: Beltz.

Fagnant, A., & Vlassis, J. (2013). Schematic representations in arithmetical problem solving: analysis of their impact on grade 4 students. Educatinal Studies in Mathematics, 84(1), 149–168.

Franke, M., & Ruwisch, S. (2010). Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule (2. Aufl.). Heidelberg: Spektrum.

Freudenthal, H. (1983). Wie entwickelt sich reflexives Denken? Neue Sammlung, 23(5), 485–497.

Goldin, G. A., & Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin & B. Greer (Hrsg.), Theories of mathe- matical learning (S. 397–430). Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. Cuoco & F. R. Curcio (Hrsg.), The roles of representation in school mathematics (S. 1–23). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Gravemeijer, K. (2010). Preamble: from models to modeling. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers & L. Verschaffel (Hrsg.), Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education (S. 7–22). Dordrecht: Springer.

Hasemann, K. (2006). Rechengeschichten und Textaufgaben – Vorgehensweisen, Darstellungsformen und Einsichten von Kindern am Ende des 2. Schuljahres. In E. Rathgeb-Schnierer & U. Roos (Hrsg.), Wie rechnen Matheprofis? Ideen und Erfahrungen zum offenen Mathematikunterricht (S. 15–26). München: Oldenbourg.

Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. Journal of Educational Psychology, 91(4), 684–689.

Hess, K. (2012). Kinder brauchen Strategien. Seelze: Klett.

Hoffmann, M. H. G. (2005). Erkenntnisentwicklung. Frankfurt a. M.: Klostermann.

Hussy, W., Schreier, M., & Echterhoff, G. (Hrsg.). (2013). Forschungsmethoden in Psychologie und Sozialwissenschaften für Bachelor (2. Aufl.). Berlin: Springer.

KMK (2005). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. München: Luchterhand.
Krauthausen, G., & Scherer, P. (2007). Einführung in die Mathematikdidaktik (3. Aufl.). München: Elsevier Spektrum.

Laakmann, H. (2013). Darstellungen und Darstellungswechsel als Mittel zur Begriffsbildung. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Larkin, J. H., & Simon, H. A. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. Cognitive Science, 11(1), 65–99.

Latour, B. (1990). Drawing things together. In M. Lynch & S. Woolgar (Hrsg.), Representation in scientific practice (S. 19–68). Cambridge: MIT Press.

Latour, B., & Woolgar, S. (1986). Laboratory life. Princeton: Princeton University Press.

Lesh, R. A., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathe- matics learning and problem solving. In C. Janvier (Hrsg.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (S. 33–40). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Lopez Real, F., & Veloo, P. K. (1993). Children's use of diagrams as a problem-solving strategy. In N. Hirabayashi & L. Shigematsu (Hrsg.), Proceedings of the 17th international conference for the psychology of mathematics education (S. 169–176). Tsukuba: University of Tsukuba.

Mason, J. (1987). Erziehung kann nur auf die Bewußtheit Einfluß nehmen. mathematik lehren, 21(2), 4–5. Mayring, Ph (2010). Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken (11. Aufl.). Weinheim: Beltz. Meira, L. (2010). Mathematical representations as systems of notations-in-use. In K. Gravemeijer, R. Leh- rer, B. van Oers & L. Verschaffel (Hrsg.), Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education (S. 87–103). Dordrecht: Springer.

Müller, G. N. (1995). Kinder rechnen mit der Umwelt. In G. N. Müller & E. C. Wittmann (Hrsg.), Mit Kindern rechnen (S. 42–64). Frankfurt a. M.: Arbeitskreis Grundschule.

Novick, L. R. (2006). Understanding spatial diagram structure. The Quarterly Journal of Experimental Psychology, 59(10), 1826–1856.

Nührenbörger, M., & Schwarzkopf, R. (2010). Die Entwicklung mathematischen Wissens in sozial-inter-aktiven Kontexten. In C. Böttinger, K. Bräuning, M. Nührenbörger, R. Schwarzkopf & E. Söbbe-ke (Hrsg.), Mathematik im Denken der Kinder. Anregungen zur mathematikdidaktischen Reflexion (S. 73–81). Seelze: Klett.

Ott, B. (2016). Textaufgaben grafisch darstellen: Entwicklung eines Analyseinstruments und Evaluation einer Interventionsmaßnahme. Münster: Waxmann.

Palmer, S. E. (1978). Fundamental aspects of cognitive representation. In E. Rosch & B. B. Lloyd (Hrsg.),

Cognition and categorization (S. 259–303). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Pantziara, M., Gagatsis, A., & Elia, I. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. Educational Studies in Mathematics, 72(1), 39–60.

Peirce, C. S. (1965). Collected papers of Charles Sanders Peirce, Band I und II. Cambridge: Harvard University Press. hrsg. von Ch. Hartshorne & P. Weiss

Peschek, W. (2003). Anmerkungen zur Vielfalt der Darstellungen und zur Rolle der Computer. In M. H. G. Hoffmann (Hrsg.), Mathematik verstehen: Semiotische Perspektiven (S. 196–205). Hildesheim: Franzbecker.

Peschek, W. (1988). Untersuchungen zur Abstraktion und Verallgemeinerung. In W. Dörfler (Hrsg.), Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung (S. 127–190). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.
Pimm, D. (1987). Speaking mathematically. Communication in mathematics classrooms. London: Routledge.

Rasch, R. (2001). Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule. Hildesheim: Franzbecker.

Rinkens, H. D. (1973). Abstraktion und Struktur. Ratingen: Henn.

Roth, W.-M., & McGinn, M. K. (1998). Inscriptions: toward a theory of representing as social practice. Review of Educational Research, 68(1), 35–59.

Scherer, P., & Opitz, M. E. (2010). Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe. Heidelberg: Spektrum.

Schipper, W. (2009). Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Braunschweig: Schroedel.

Schnotz, W. (2014). Visuelle kognitive Werkzeuge beim Mathematikverstehen. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2014 (S. 45–52). Münster: WTM.

Schnotz, W. (2001). Wissenserwerb mit Multimedia. Unterrichtswissenschaft, 29(4), 292–318.

Schnotz, W. (1994). Wissenserwerb mit logischen Bildern. In B. Weidenmann (Hrsg.), Wissenserwerb mit Bildern (S. 95–147). Bern: Huber.

Schreiber, Ch (2010). Semiotische Prozess-Karten: Chatbasierte Inskriptionen in mathematischen Problemlöseprozessen. Münster: Waxmann.

Schülke, C. (2013). Mathematische Reflexion in der Interaktion von Grundschulkindern. Münster: Waxmann.

Schwarzkopf, R. (2006). Elementares Modellieren in der Grundschule. In A. Büchter, H. Humenberger, S. Hussmann & S. Prediger (Hrsg.), Realitätsnaher Mathematikunterricht (S. 95–105). Hildesheim: Franzbecker.

Selter, Ch (2007). Leistungsfeststellung als Grundlage individueller Förderung. Grundschulunterricht, 54(7–8), 3–8.

Selter, Ch (1994). Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Grundschule. Wiesbaden: DUV.
Sherin, B. L. (2000). How students invent representations of motion. Journal of Mathematical Behavior, 19(4), 399–441.

Söbbeke, E. (2005). Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern. Hildesheim: Franzbecker.

Steinweg, A. S. (2013). Algebra in der Grundschule. Berlin: Springer.

Steinweg, A. S. (2002). Ich freu' mich so, dass ich 1.-Schuljahr-Aufgaben rechnen darf. Grundschulunter- richt, 49(10), 17–20.

Stern, E., Aprea, C., & Ebner, H. G. (2003). Improving cross-content transfer in text processing by means of active graphical representation. Learning and Instruction, 13(2), 191–203.

Sturm, N. (2014). Sind Repräsentationen beim Lösen problemhaltiger Textaufgaben für Grundschulkinder lösungsunterstützend? In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2014 (S. 1191–1194). Münster: WTM-Verlag.

Strauss, A. L., & Corbin, J. M. (1996). Grounded theory: Grundlagen qualitativer Sozialforschung. Wein- heim: Beltz.

Universität Zürich (2016). Mehrfaktorielle Varianzanalyse (ohne Messwiederholung). http://www.methodenberatung.uzh.ch/de/datenanalyse/unterschiede/zentral/mvarianz.html#K3_3. Zugegriffen: 24. Apr. 2017.

Van Dijk, I. M. A. W., van Oers, B., & Terwel, J. (2003). Providing or designing? Constructing models in primary maths education. Learning and Instruction, 13(1), 53–72.

Van Essen, G., & Hamaker, C. (1990). Using self–generated drawings to solve arithmetic word problems. Journal of Educational Research, 83(6), 301–312.

Van Garderen, D. (2007). Teaching students with LD to use diagrams to solve mathematical word prob- lems. Journal of Learning Disabilities, 40(6), 540–553.

Van Garderen, D., & Montague, M. (2003). Visual-spatial representation, mathematical problem solving, and students of varying abilities. Learning Disabilities Research & Practice, 18(4), 246–254.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Gravemeijer, K. P. E. (1991). Tests are not all bad. In L. Streefland (Hrsg.), Realistic mathematics education in primary school (S. 139–155). Utrecht: Press.

Veloo, P. K., & Real, L. F. (1994). Drawing diagrams and solving word problems. http://www.merga.net. au/documents/RP_Veloo_Real_1994.pdf. Zugegriffen: 12. Jan. 2015.

Voßmeier, J. (2012). Schriftliche Standortbestimmungen im Arithmetikunterricht. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Wirtz, M., & Caspar, F. (2002). Beurteilerübereinstimmung und Beurteilerreliabilität. Göttingen: Hogrefe.

Winkel, K. (2012). Entwicklungsmechanismen von Metakognition im mathematischen Unterrichtsdiskurs der Grundschule. München: Dr. Hut.

Wygotski, L. S. (1964). Denken und Sprechen. Berlin: Akademie-Verlag.