

Zitiervorschlag: Link, M. (2016) Operationseigenschaften erkunden: Muster entdecken und beschreiben in Aufgabenpärchen. Mathematik differenziert, (4), 10-13. <https://doi.org/10.18747/PHSG-coll3/id/497>

Zur Verfügung gestellt auf PHIQ:

PHIQ-DOI: <https://doi.org/10.18747/PHSG-coll3/id/497>

Original-DOI: Kein Original-DOI

Dokumentart: Magazine Article

Version: accepted version

Copyright-Hinweis: Dies ist die accepted version eines Artikels aus Mathematik differenziert. Die definitive Fassung ist online via <https://www.westermann.de/anlage/4587056/Operationseigenschaften-erkunden-Muster-entdecken-und-beschreiben-in-Aufgabenpaerchen> . Copyright ©Westermann Gruppe.

Lizenz: Alle Rechte vorbehalten

Operationseigenschaften erkunden

Muster entdecken und beschreiben in Aufgabenpärchen

von Michael Link

Ausgehend von produktiven Übungen zu den Grundrechenarten können Kinder von Anfang an algebraische Denkweisen herangeführt werden – aber nur, wenn sie durch die Aufgabenstellung und die Behandlung der Aufgabe im Unterricht dazu angeregt werden. Aufgabenpärchen sind ein einfaches Aufgabenformat, das dazu vielfältige Möglichkeiten bietet.

Gegen Ende des ersten Schuljahres. Zur Festigung der Addition und Subtraktion bearbeiten die Kinder im Rahmen der Wochenplanarbeit einzeln Aufgabenpärchen unter der Überschrift „Nachbaraufgaben“, so auch Emma (Abb. 1).

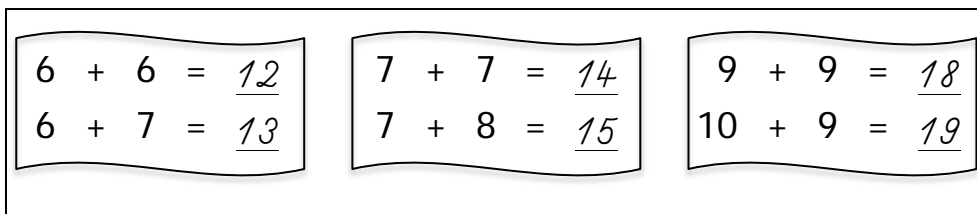


Abb. 1: Emmas Bearbeitung

Am Ende der Stunde kontrolliert die Lehrerin und stellt zufrieden fest, dass Emma alle Aufgaben richtig gelöst hat. Sie macht ein Häkchen hinter die Aufgabe – so wie bei einem Großteil der Kinder in der Klasse. Als sie nachfragt, wie Emma die Aufgaben gelöst hat, erklärt diese ihr: „Sechs plus sechs, das weiß ich, das sind zwölf, und sechs plus sieben, da habe ich zuerst bis zur zehn und dann noch drei, dann ergibt das dreizehn.“

Dies zeigt exemplarisch auf: Wenn man sich bei Aufgaben wie dieser auf die Ermittlung richtiger Ergebnisse beschränkt, ist schnell ein Großteil ihres Potentials verschenkt. Wir können nicht davon ausgehen, dass Schülerinnen und Schüler die in der Aufgabe enthaltenen und für uns so offensichtlichen und selbstverständlichen Muster von alleine bewusst wahrnehmen und nutzen. Im oben geschilderten Beispiel werden die Kinder weder durch die Gestaltung der Aufgabe (z. B. durch die Frage: „Fällt dir etwas auf?“) noch durch die Behandlung der Aufgabe im Unterricht dazu angeregt oder aufgefordert. Dabei wird es dann erst richtig interessant, z. B.:

- wenn Kinder entdecken, dass die obere Aufgabe in der unteren „drin steckt“ und man daraus auf das Ergebnis der unteren schließen kann (so wie es unter der Überschrift „Nachbaraufgaben“ intendiert ist),
- wenn darüber hinaus Kinder die Pärchen vergleichen, nach Gemeinsamkeiten und Unterschieden suchen und so allgemein gültigen Eigenschaften der Addition auf die Spur kommen („Ist das immer so?“),
- wenn Kinder mit Pärchen zur Subtraktion vergleichen und feststellen können, dass operative Veränderungen vor dem Gleichheitszeichen dort ganz andere Auswirkungen auf die Ergebnisse haben („Wie ist das bei Minusaufgaben?“).

Algebraisches Denken anregen

Nach Steinweg (2013) findet ein Übergang vom arithmetischen zum algebraischen Denken dann statt, wenn über die Berechnung von Ergebnissen hinaus allgemeingültige Beziehungen und mathematische Strukturen in den Fokus der Aufmerksamkeit rücken und zum Objekt der Auseinandersetzung werden. Im Rahmen produktiver Übungen mit Aufgabenpärchen wie auch vergleichbarer Aufgabenformate stehen dabei insbesondere zwei Aspekte im Vordergrund: Zum Einen können über Beschreibungen der Muster für algebraisches Denken typische Prozesse der Verallgemeinerung und Abstraktion initiiert werden, zum Anderen wird eine bewusste Auseinandersetzung mit gesetzmäßigen Eigenschaften von Rechenoperationen gefördert.

Muster versprachlichen

Zunächst ist es wichtig, den Mustern, die die zugrunde liegenden mathematischen Strukturen sichtbar machen, im Unterricht genügend Raum und Aufmerksamkeit zukommen zu lassen. Das heißt, dass Schülerinnen und Schüler explizit dazu aufgefordert werden sollten, auf Muster und Bauprinzipien von Aufgabenserien zu achten bzw. nach diesen zu suchen („Was fällt dir auf?“ „Wie lautet die ‚Regel‘“?). Sinnvollerweise ist dies immer verbunden mit Aktivitäten zur Versprachlichung der gemachten Entdeckungen, sei dies schriftlich in Form von kleinen Forscherberichten oder mündlich in Form von Rechenkonferenzen oder im Klassengespräch. Eine Versprachlichung stellt immer eine erste Abstraktion der entdeckten Zusammenhänge und eine Loslösung von konkreten Aufgaben und Zahlenwerten dar. Damit wird einerseits ein Beitrag zum inzwischen in allen Bildungsplänen und Standards geforderten Erwerb fachsprachlicher Kompetenzen geleistet, und andererseits können diese Versprachlichungen als Vorstufe auf dem Weg zur Formulierung mathematischer Gesetzmäßigkeiten mit Variablen und Symbolen in den höheren Klassenstufen angesehen werden.

Im Gegensatz zur mündlichen Auseinandersetzung stellt das Aufschreiben zwar höhere Anforderungen an die Kinder, bietet aber den Vorteil, dass dabei dauerhafte Dokumente entstehen, die wieder zum Unterrichtsgegenstand gemacht werden können (Link 2013). Mit Fragen wie „Kann man gut verstehen, was gemeint ist?“ „Kann man das noch genauer ausdrücken?“ „Wie könnte man die Beschreibung noch verbessern?“ können Reflexionen über die sprachliche Form und Qualitätsaspekte von Beschreibungen ausgelöst werden, welche wiederum eine vertiefte inhaltliche Auseinandersetzung initiieren können (Abb. 2). „Aufschreiben“ meint hier nicht, dass sich die Schülerinnen und Schüler nur auf sprachliche Mittel bei der Dokumentation ihrer Entdeckungen auf Papier beschränken müssten. Es ist sogar sinnvoll, die Kinder gezielt zum Einsatz nonverbaler Darstellungsmittel wie farbiger Markierungen, Pfeilen oder anderer grafischer Elemente anzuhalten, wenn die richtigen Worte noch fehlen (Abb. 3).

Schau dir die Aufgabenpärchen genau an.

| | |
|-----------------|------------------|
| $2 \cdot 2 = 4$ | $5 \cdot 5 = 25$ |
| $1 \cdot 3 = 3$ | $4 \cdot 6 = 24$ |

| |
|---------------------|
| $10 \cdot 10 = 100$ |
| $9 \cdot 11 = 99$ |

Finde ein Pärchen, das dazu passt.

| |
|------------------|
| $6 \cdot 6 = 36$ |
| $5 \cdot 7 = 35$ |

Was fällt dir auf?
Es fällt mir auf das hinten immer fast die gleichen ergebnisse sind,

Abb. 2: Wie könnte man diese Beschreibung noch verbessern?

3)

a. Rechne aus.

| | |
|-----------------|-----------------|
| $3 \cdot 3 = 9$ | $2 \cdot 4 = 8$ |
|-----------------|-----------------|

| | |
|-----------------|-----------------|
| $2 \cdot 2 = 4$ | $1 \cdot 3 = 3$ |
|-----------------|-----------------|

| | |
|------------------|------------------|
| $5 \cdot 5 = 25$ | $4 \cdot 6 = 24$ |
|------------------|------------------|

b. Finde ein Pärchen, das zu den anderen passt.

| | |
|---------------------|-------------------|
| $10 \cdot 10 = 100$ | $9 \cdot 11 = 99$ |
|---------------------|-------------------|

c. Was fällt dir auf?
Hier bei \bullet ist immer ein weniger. Hier bei \bullet wird immer einer mehr. Und bei \bullet wird auch immer einer weniger.

Schau dir die Aufgabenpärchen genau an.

| | |
|----------------|----------------|
| $18 + 14 = 32$ | $25 + 10 = 35$ |
| $14 + 18 = 32$ | $10 + 25 = 35$ |

| |
|----------------|
| $20 + 35 = 55$ |
| $35 + 20 = 55$ |

Finde ein Pärchen, das dazu passt.

| |
|----------------|
| $45 + 30 = 75$ |
| $30 + 45 = 75$ |

Was fällt dir auf?

| |
|----------------|
| $45 + 30 = 75$ |
| $30 + 45 = 75$ |

Abb. 3: Zur Beschreibung der Muster in Aufgabenpärchen können Kinder auch nonverbale Darstellungsmittel einsetzen.

Operationseigenschaften gezielt erkunden

Über das Verallgemeinern der Muster in produktiven Übungen wie den Aufgabenpärchen können Eigenschaften von Rechenoperationen bewusst gemacht und für die Kinder zum Gegenstand des Lernens gemacht werden. Weder das Erzielen richtiger Ergebnisse noch das Erkunden und Üben von Rechenwegen steht hier im Zentrum des Unterrichts, es geht vielmehr um das Erkunden und Erkennen von musterhaften Variationen der Zahlenwerte in Aufgaben und das Verstehen der Auswirkungen dieser Variationen auf die Ergebnisse.

Mit Aufgabenpärchen ist es möglich, eine Vielzahl von Eigenschaften von Rechenoperationen zu thematisieren. Das Spektrum umfasst leicht zugängliche Muster

wie etwa die Kommutativität bei der Addition und Multiplikation (vgl. das erste Beispiel in Abb. 3), aber auch schwieriger zu durchschauende Zusammenhänge (vgl. das zweite Beispiel zur Multiplikation in Abb. 3, das sich auf die dritte binomische Formel als Spezialfall des Distributivgesetzes rückführen lässt: $(a - 1) \cdot (a + 1) = a^2 - 1$). Insbesondere können auch die sogenannten Konstanzeigenschaften in den Blick genommen werden: Bei der Addition und Subtraktion bleibt das Ergebnis gleich, wenn die Summanden bzw. Faktoren gegensinnig verändert werden. Bei der Subtraktion und Division muss gleichsinnig verändert werden, wenn das Ergebnis konstant bleiben soll. Auch verwandte operative Variationen, bei denen sich die Wirkungen nicht gegenseitig aufheben, sondern zu einer Veränderung des Ergebnisses führen, können erkundet werden. Hier ist insbesondere der Vergleich von Rechenoperationen interessant: Wenn bei der Addition die Zahl nach dem Pluszeichen (der zweite Summand) erhöht wird, vergrößert sich das Ergebnis um den entsprechenden Betrag. Wenn bei der Subtraktion die Zahl nach dem Minuszeichen (der Subtrahend) erhöht wird, verkleinert sich hingegen das Ergebnis. Mit Rückgriff auf Grundvorstellungen zu den Operationen und anschauliche Darstellungen wie z.B. Plättchen werden diese Gesetzmäßigkeiten erklär- und verstehbar: Bei der Addition vergrößert sich durch das Hinzulegen von Plättchen zum zweiten Summanden auch die Gesamtsumme. Bei der Subtraktion wird – je nach Grundvorstellung – entweder mehr weggenommen, oder der Unterschied zwischen beiden Zahlen verkleinert sich (siehe Abb. 4).

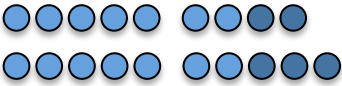
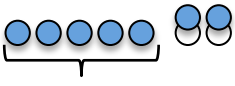
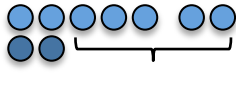
| $7+2$ $7+3$ | $7-2$ $7-3$ | $7-2$ $7-3$ |
|---|---|---|
|  |  |  |
| Die Summe wird grösser, weil die zweite Teilmenge größer wird bzw. mehr hinzugelegt wird. | Die Differenz wird kleiner, weil mehr weggenommen wird. | Die Differenz wird kleiner, weil der Unterschied zwischen beiden Zahlen kleiner wird. |

Abb. 4: Veranschaulichung operativer Veränderungen bei der Addition und Subtraktion.

Ein vertieftes Verständnis der Operationseigenschaften zeigen Kinder, wenn sie erkennen, dass Zusammenhänge allgemeingültig und unabhängig von den konkreten Zahlenwerten einer Aufgabe sind. In Abb. 5 zeigt sich dies exemplarisch: Abweichend von der operativen Variation in den vorgegebenen Aufgabenpärchen (gegenseitiges Verändern immer genau um 5) wählt das Kind einen anderen Betrag, um ein Aufgabenpärchen mit konstantem Ergebnis zu erzeugen. In der Beschreibung verweist der Ausdruck „eine Zahl“ darauf, dass es eine beliebige Zahl sein kann, mit der die Summanden gegensinnig verändert werden können. Über eine implizite Anwendung hinaus, etwa im Kontext verschiedener Rechenstrategien beim Vereinfachen von Aufgaben, kann es so gelingen, diese für die Addition kennzeichnende Eigenschaft zum bewussten Gegenstand des Denkens zu machen.

Schau dir die Aufgabenpärchen genau an.

| | |
|----------------|----------------|
| $10 + 10 = 20$ | $40 + 20 = 60$ |
| $15 + 5 = 20$ | $45 + 15 = 60$ |

| |
|----------------|
| $20 + 50 = 70$ |
| $25 + 45 = 70$ |

Finde ein Pärchen, das dazu passt.

| |
|----------------|
| $30 + 40 = 70$ |
| $26 + 44 = 70$ |

Was fällt dir auf?

Ich habe da eine Zahl höher gemacht und eine Zahl weniger gemacht.

Abb. 5: Gegensinniges Verändern bei der Addition um einen beliebigen Betrag.

Zu den Materialien

Auf den folgenden Seiten sind verschiedene Aufgaben zusammen gestellt, mittels derer Schülerinnen und Schüler zu einer bewussten Auseinandersetzung mit den Konstanzeigenschaften der Addition und Subtraktion sowie verwandten operativen Eigenschaften angeregt werden können. Der Fokus der Bearbeitung soll explizit nicht auf der Übung von Rechenfertigkeiten und der Ermittlung richtiger Ergebnisse liegen, sondern auf dem Erkunden, Erkennen, Fortführen und Beschreiben der Muster, durch die die operativen Eigenschaften sichtbar werden. Dies soll den Kindern auch dadurch transparent gemacht werden, dass bei den ersten vier Aufgaben die Ergebnisse in den vorgegebenen Pärchen schon angegeben sind.

Bei den ersten vier Aufgaben (M1-M4) steht das Kennenlernen des Aufgabenformats im Vordergrund: Zu drei vorgegebenen Pärchen sollen die Schülerinnen und Schüler passende Pärchen finden, das Bauprinzip der Pärchen in Form einer „Regel“ und die davon abhängige Variation der Ergebnisse beschreiben. Die Zahlen vor dem Gleichheitszeichen werden dabei jeweils immer um die gleichen Beträge verändert (z.B. bei M3: Erhöhung von Minuend und Subtrahend immer um genau 1). Die nächsten vier Aufgaben (M5-M8) bieten verschiedene Möglichkeiten der Erweiterung und Vertiefung. M5 und M6 regen zur Verallgemeinerung und Abstrahierung der Konstanzeigenschaften von Addition und Subtraktion an: Das Ergebnis bleibt immer gleich, egal um welchen Betrag die Zahlen vor dem Gleichheitszeichen gegen- oder gleichsinnig verändert werden. Bei M7 und M8 steht die vergleichende Betrachtung von Eigenschaften der Addition und Subtraktion im Mittelpunkt.

Über die Aufforderungen, passende Pärchen zu finden, Muster zu beschreiben und Auswirkungen auf Ergebnisse zu erkunden und zu erklären, können die Materialien eine Grundlage dafür bilden, dass im Arithmetikunterricht einmal nicht das Rechnen, sondern die Rechenoperationen selbst mit ihren Eigenschaften im Fokus der Auseinandersetzung stehen. Über die Bearbeitung der Aufgaben durch die Schülerinnen und Schüler in Einzel- oder Partnerarbeit hinaus ist es aber notwendig, die Thematik in der weiteren Unterrichtsgestaltung aufzugreifen und fortzuführen. Dazu gehören vor allem Gelegenheiten des Austauschs und der Diskussion darüber,

- welche Pärchen warum zu den vorgegebenen Pärchen passen,
- was eine „gute“ Beschreibung („Bauprinzip“ oder „Regel“) ist,
- warum sich welche Veränderungen vor dem Gleichheitszeichen wie auf das Ergebnis auswirken.

Dann kann der Mathematikunterricht schon in der Grundschule einen wichtigen Beitrag zur Förderung des algebraischen Denkens leisten.

Die Autorin/der Autor

Dr. Michael Link ist Dozent für Mathematikdidaktik und wiss. Mitarbeiter an der Pädagogischen Hochschule St.Gallen.

Literatur

Link, M.: Zahlenmuster beschreiben. In: Die Grundschulzeitschrift Nr. 268/269 (2013), S.42-46.

Steinweg, A. S.: Algebra in der Grundschule. Heidelberg 2013. Springer Spektrum.

M1

$$10 + 10 = 20$$

$$11 + 9 = 20$$

$$53 + 6 = 59$$

$$54 + 5 = 59$$

$$25 + 3 = 28$$

$$26 + 2 = 28$$

Finde Pärchen, die dazu passen.

Regel:

Die erste Zahl wird immer um 1 größer, die zweite Zahl wird immer um 1 größer.

Schau dir die Ergebnisse an. Was fällt dir auf?

M2

$$15 + 5 = 20$$

$$20 + 10 = 30$$

$$30 + 10 = 40$$

$$35 + 15 = 50$$

$$6 + 4 = 10$$

$$11 + 9 = 20$$

Finde Pärchen, die dazu passen.

| |
|-------|
| |
| _____ |
| _____ |

| |
|-------|
| |
| _____ |
| _____ |

Finde selbst eine Regel:

| |
|--|
| |
|--|

Schau dir die Ergebnisse an. Was fällt dir auf?

| |
|--|
| |
|--|

M3

$$16 - 6 = 10$$

$$17 - 7 = 10$$

$$27 - 2 = 25$$

$$28 - 3 = 25$$

$$45 - 13 = 32$$

$$46 - 14 = 32$$

Finde Pärchen, die dazu passen.

Finde selbst eine Regel:

Schau dir die Ergebnisse an. Was fällt dir auf?

M4

$$29 - 9 = 20$$

$$29 - 10 = 19$$

$$27 - 5 = 22$$

$$27 - 6 = 21$$

$$65 - 13 = 52$$

$$65 - 14 = 51$$

Finde Pärchen, die dazu passen.

Finde selbst eine Regel:

Schau dir die Ergebnisse an. Was fällt dir auf?

M5

Rechne die Aufgabenpärchen aus.

$$\begin{array}{r} 17 + 5 = \underline{\quad} \\ 20 + 2 = \underline{\quad} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 + 10 = \underline{\quad} \\ 27 + 8 = \underline{\quad} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45 + 15 = \underline{\quad} \\ 40 + 20 = \underline{\quad} \end{array}$$

Finde Pärchen, die dazu passen.

| |
|-------|
| |
| _____ |
| _____ |

| |
|-------|
| |
| _____ |
| _____ |

Finde eine Regel:

| |
|--|
| |
|--|

Schau dir die Ergebnisse an. Was fällt dir auf?

| |
|--|
| |
|--|

M6

Rechne die Aufgabenpärchen aus.

$$17 - 5 = \underline{\quad}$$

$$16 - 4 = \underline{\quad}$$

$$24 - 12 = \underline{\quad}$$

$$26 - 14 = \underline{\quad}$$

$$60 - 25 = \underline{\quad}$$

$$55 - 20 = \underline{\quad}$$

Finde Pärchen, die dazu passen.

| |
|-------|
| |
| _____ |
| _____ |

| |
|-------|
| |
| _____ |
| _____ |

Finde eine Regel:

| |
|--|
| |
|--|

Schau dir die Ergebnisse an. Was fällt dir auf?

| |
|--|
| |
|--|

M7

Rechne die Aufgabenpärchen aus.

$$\begin{array}{r} 34 + 4 = \underline{\quad} \\ 35 + 5 = \underline{\quad} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 - 4 = \underline{\quad} \\ 35 - 5 = \underline{\quad} \end{array}$$

Vergleiche die beiden Pärchen und die Ergebnisse.

Was fällt dir auf?

Kannst du das erklären?

Finde Pärchen mit Plus- oder Minusaufgaben, bei denen die Ergebnisse gleich bleiben.

Erkläre, warum bei deinen Pärchen die Ergebnisse gleich bleiben.

M8

Denk dir eine Regel aus:

Finde Pärchen mit Plus- und Minusaufgaben, die dazu passen.

Was passiert bei den Plusaufgaben mit den Ergebnissen, was bei den Minusaufgaben? Kannst du das erklären?